Csemegék az analízisből középiskolai ízesítéssel

Besenyei Ádám
badam@cs.elte.hu

10. hét

10.1. Legyen $n \geq 3$ pozitív egész szám. Adjuk meg zárt alakban az alábbi összeget:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + (n-2)(n-1)n.$$

10-11. évfolyam

10.2. Bizonyítsuk be, hogy ha n tetszés szerinti, 3-nál nem kisebb pozitív egész számot jelöl, akkor

$$\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}.$$

11-12. évfolyam

10.3. Legyen $h(1) = 1$ és $n = 2, 3, \ldots$ esetén $h(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Mutassuk meg, hogy

$$L = \frac{1}{h^2(1)} + \frac{1}{2 \cdot h^2(2)} + \frac{1}{3 \cdot h^2(3)} + \ldots + \frac{1}{2012 \cdot h^2(2012)} < 2.$$

11-12. évfolyam

10.4. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(2n^2\right)$ összeg értékét, ahol arcctg a ctg függvény $(0, \pi)$ intervallumon vett inverzét jelöli.

11-12. évfolyam

10.5. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)k}{m^{k+1}} = 1.$$

11-12. évfolyam