Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2018. ősz

9. előadás (november 19.)

Az előadás első részében a határérték és műveletek témakörét folytattuk, eddig szerepelt a limesz és összeadás kapcsolata. Hátravan a limesz és szorzás, valamint a limesz és hányados kapcsolata. Rögtön ki is mondtam azt a tételt, hogy mit mondhatunk a $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ határértékről, amennyiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = a$: a választ egy táblázatban foglaltuk össze. Bizonyításképpen megnéztük az $a, b \in \mathbb{R}$, az $a > 0$ és $b = \infty$ (itt valójában azt is beláttuk, hogy ha (a_n) alulról korlátos egy pozitív számmal és $b_n \to \infty$, akkor a szorzat is végtelenhez tart), valamint $a = b = \infty$ eseteket (a bizonyítások az összeadás esetében alkalmazottakhoz hasonlóak, kis módosításokkal); a többit házi feladatnak adtam fel (de vizsga előtti konzultáción mindent meg lehet kérdezni). A kritikus határértékekre is néztünk példát, méghozzá láttuk, hogy $a = 0$, $b = \infty$ esetén a szorzatsorozat viselkedése mind a négyféle kategóriába eshet: $a_n = 1/n$, $b_n = n$ esetén $a_n b_n = 1$, tehát konvergens; $a_n = 1/n$, $b_n = n^2$ esetén $a_n b_n = n$, tehát $a_n b_n \to \infty$; $a_n = -1/n$, $b_n = n^2$ esetén $a_n b_n = -n \to -\infty$; $a_n = (-1)^n/n$, $b_n = n$ esetén $a_n b_n = (-1)^n$ oszcillálva divergens. Azt is megjegyeztem, hogy a limesz és szorzás kapcsolatára vonatkozó tétel csak véges sok (rögzített számú) tényező esetére alkalmazható. Például az n tényezőből álló $(\sqrt[n]{2})^n$ szorzatnak mind az n darab tényezője 1-hez tart, de a szorzat értéke minden n-re 2. Egy másik becsapós példa az $(1+\frac{1}{n})^n$ szorzat, amely „tényezőnként 1-hez tart”, de a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt $(1+\frac{1}{n})^n \geq 2$, tehát ha egyáltalán van limesze, akkor az mindenképpen legalább 2.

Végül a limesz és műveletek témakörben a hányados műveletére tértünk rá. Mivel definíció szerint $a_n/b_n = a_n \cdot (1/b_n)$, ezért elég a reciprokot vizsgálni, utána alkalmazható a szorzásra vonatkozó tétel. Beláttuk, hogy ha $b_n \to b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor $1/b_n \to 1/b$; ha pedig $b_n \to \infty$ vagy $b_n \to -\infty$, akkor $1/b_n \to 0$. Megjegyeztem, hogy ha $b_n \to 0$, akkor $(1/b_n)$ kritikus limesz: $b_n = 1/n$ esetén $1/b_n = n \to \infty$, $b_n = -1/n$ esetén $1/b_n = -n \to -\infty$ és $b_n = (-1)^n/n$ esetén $1/b_n = (-1)^n n$ oszcillálva divergens. Itt megkérdeztem, hogy vajon miért nem beszéltem negyedik esetről, tehát előfordulhat-e, hogy $b_n \to 0$, és $(1/b_n)$ konvergens? Végül házinak feladtam, hogy írjuk fel a hányados limeszére vonatkozó táblázatot.

Ezután következett a határérték és rendezés (más szóval egyenlőtlenségek) témaköre. Kimondtam a fő tételünket, a rendőrelvet, amelyet három részre bontottam: 1. ha $a_n \leq b_n$ egy küszöbtől kezdve és $a_n \to \infty$, akkor $b_n \to \infty$; 2. ha $a_n \geq b_n$ egy küszöbtől kezdve és $a_n \to -\infty$, akkor $b_n \to -\infty$; 3. ha $\lim a_n = \lim c_n = a$ (ahol a véges vagy végtelen) és egy küszöbtől kezdődően $a_n \leq b_n \leq c_n$, akkor $\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n = a$. Példaként meghatároztuk az $\sqrt[n]{10 + (-1)^n}$ sorozat limeszét. Ebben a témakörben még két állítást mondtam ki és láttam be. Az egyik a limeszek közötti egyenlőtlenségből következtet a sorozatok közötti egyenlőtlenségre: ha $\lim a_n < \lim b_n$, akkor egy indextől kezdve $a_n < b_n$, ez a határérték definíciójának egy egyszerű következménye. Rögtön felhívtam a figyelmet, hogy fontos a szigorú egyenlőtlenség, hiszen $a_n = 1/n$, $b_n = 0$ esetén $\lim a_n \leq \lim b_n$, de minden n-re $a_n > b_n$. A másik állítás úgy szólt, hogy ha $a_n \leq b_n$ és van határértékük, akkor $\lim a_n \leq \lim b_n$, amit indirekt igazoltunk az előzőre való visszavezetéssel. Itt megjegyeztem, hogy ha $a_n < b_n$, akkor is csak $\lim a_n \leq \lim b_n$-re következtethetünk, hiszen például $a_n = 0$ és $b_n = 1/n$ esetén a két sorozat limesze megegyzik.

Ezt követően a nagységrendek témakörét tárgyaltuk. Motivációként felírtam az n^k (k pozitív egész), a^n ($a > 1$), $n!$ és n^n sorozatokat, és azt a kérdést tettem fel, hogy melyik tart gyorsabban a végtelenhez. Rögtön definiáltam, hogy mit is értünk nagyságrend alatt: ha $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, akkor (a_n) gyorsabban tart végtelenhez, mint (b_n), amennyiben $b_n/a_n \to 0$ (vagy csak most(!) ekvivalensen $a_n/b_n \to \infty$). Bevezettem minderre a $b_n \prec a_n$ jelölést és tételként kimondtam, hogy $a > 1$, $k > 0, k \in \mathbb{Z}$ esetén $n^k \prec a^n \prec n! \prec n^n$. Mivel $n!/n^n \leq 1/n$, így $n!$-nál gyorsabban tart végtelenhez n^n. A másik két nagyságrendhez a következő órán egy segédállítást látunk be.