Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2018. ősz

8. előadás (november 12.)

Az óra elején feleleveníttettem a múltkori utolsó tételünket a határérték és korlátosság kapcsolatáról. Következményként kimondtam, hogy ha egy sorozatnak van határértéke, akkor az egyértelmű (valós szám vagy végtelen vagy mínusz végtelen és pontosan az egyik). Ezután megbeszéltük az eddigi elnevezéseinket (konvergens, divergens), és bevezettem az oszcillálva divergens sorozat elnevezést az olyan sorozatokra, amelyeknek se véges, se $\pm\infty$ határértéke nincs. Tisztáztuk, hogy ha (a_n) divergens, akkor lehet $a_n \to \infty$, $a_n \to -\infty$ és (a_n) oszcillálva divergens is. Ha pedig azt mondjuk, hogy (a_n)-nek van határértéke, akkor az jelentheti, hogy konvergens, $a_n \to \infty$ vagy $a_n \to -\infty$. Oszcillálva divergens például $(-1)^n$, de az a sorzat is, amelynek tagjai: $0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ stb.

Az órát négy nevezetes határértékkel folytattuk. Először beláttuk, hogy az (n^k) hatványsorozat határértéke 1, ha $k = 0$; ∞, ha $k > 0$ és egész; továbbá 0, ha $k < 0$ és egész. Ezután a Bernoulli-egyenlőtlenség segítségével megmutattuk, hogy $a > 1$ esetén $a^n \to \infty$ (ezt exponenciális növekedésnek hívtam), majd igazoltuk (visszavezetéssel), hogy $|a| < 1$ esetén $a^n \to 0$. Kimondtam (de nem láttam be, hanem meggondolásra feladtam házinak), hogy $a \leq -1$ esetén (a^n) oszcillálva divergens (mert sem alulról, sem felülről nem korlátos). Ezt követően megmutattuk, hogy $a > 0$ esetén $\sqrt[n]{a} \to 1$, ezt az előző típusú határértékre vezettük vissza n-edikre emeléssel. Végül pedig az $\sqrt[n]{n} \to 1$ határértéket igazoltuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával.

A következő témakör a sorozatok átrendezése volt. A (b_n) sorozat az (a_n) egy átrendezése, ha van olyan $\pi\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ bijekció (permutáció), hogy $b_n = a_{\pi(n)}$. Például az $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$ sorozat egy átrendezése az $a_2, a_1, a_4, a_3, a_6, a_5, \ldots$ sorozat, ahol most $\pi(2k) = 2k - 1$ és $\pi(2k - 1) = 2k$, hiszen $b_1 = a_2$, $b_2 = a_1$, $b_3 = a_4$, $b_4 = a_3, \ldots$. A határérték második definíciója alapján azonnal adódik, hogy az átrendezés nem változtatja meg a határértéket. Az átrendezás után a részsorozat következett. Ha $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ pozitív egészek sorozata, akkor a $b_k = a_{n_k}$ sorozat az (a_n) sorozat egy részsorozata. A definíció alapján ismét könnyű látni, hogy ha (a_n)-nek a határértéke a (amely lehet véges vagy végtelen, akkor minden részsorozatának is ez a határértéke. Végül megjegyeztük, hogy véges sok tag elhagyása vagy hozzávétele ugyancsak nem befolyásolja a sorozat besorolását. Végtelen sok tag elhagyása, elvétele már befolyásolhatja, például a $(-1)^n$ sorozatból elhagyva a páros indexűeket, egy konvergens sorozatot kapunk; visszafele pedig egy konvergensből egy oszcillálva divergenst.

Rátértünk ezt követően a limesz és műveletek kapcsolatára, az összeadással kezdtük. Egy táblázatba foglalva kimondtam, hogy ha $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor mit mondhatunk az $(a_n + b_n)$ összegsorozat határértékéről. Beláttuk, hogy ha $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, akkor $a_n + b_n \to a + b$ (a bizonyításban a háromszög-egyenlőtlenséget használtuk); ha $a = \infty$, $b = \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$; ha $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$ (itt valójában az is beláttuk, hogy egy alulról korlátos és egy végtelenez tartó sorozat összege végtelenhez tartó); többit házinak adtam ezek alapján meggondolni. A táblázatban két helyen kérdőjeleket hagytunk, amelyek a kritkus határértékeket jelentik, konkrétan, amikor a és b közül az egyik ∞, a másik pedig $-\infty$. Ebben az esetben $a_n + b_n$ viselkedése a konkrét sorozatoktól függ, mind a négy kategórába eső példát lehet adni, és adtunk is: $a_n = n + c$, $b_n = -n$ esetén $a - n + b_n = c \to c$; $a_n = 2n$, $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = n \to \infty$; $a_n = n$, $b_n = -2n$ esetén $a_n + b_n = -n \to -\infty$; $a_n = n + (-1)^n$, $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = (-1)^n$.

Az óra végén megjegyeztem, hogy a limesz és összeadás kapcsolata két tag helyett véges sok (pl. három) tagra is átvihető. De vigyázzunk, mert például az n tagú $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$ összeg minden tagja 0-hoz tart, és az összeg minden n-re 1 (nyitva hagytam a kérdés, hol a hiba?).