Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2018. ősz

7. előadás (november 5.)

Az előadás elején felelevenítettem a határérték kétféle definícióját, majd tételként kimondtam, hogy a két definíció ekvivalens (mindezt a múlt órán is felírtam már). Ezután bebizonyítottuk a tételt.

Ezt követően több példát is néztünk határértékre, valamint küszöbszámokra: $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(-1)^n/n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ (ez utóbbinál a „fáradékony bolha” tréfás elnevezést mondtam: a bolha n-edik lépése $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, ekkor a lépések hossza 0-hoz tart, de a bolha akármilyen messze eljut.). A „küszöbmentes” definícióval megmutattuk, hogy az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak nincs határértéke. Ezután bevezettem a konvergens és divergens sorozat elnevezéseket: konvergens egy sorozat, ha van olyan b valós szám, amely határértéke; divergens, ha nem konvergens, vagyis nincs olyan b valós szám, amely határértéke lenne. Végül néhány megjegyzést tettem a két definícióval kapcsolatban. Egyrészt, ha a $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ intervallumon kívül csak véges sok tagja van a sorozatnak, akkor belül végtelen sok, azonban fordítva nem igaz (pl. $(-1)^n$, $b = 1$, $\varepsilon = 1$). Másrészt, ha ε-hoz N jó küszöb, akkor minden N-nél nagyobb szám is jó küszöb ugyanehhez az ε-hoz. Végül, ha N jó küszöb ε-hoz, akkor minden $\varepsilon' > \varepsilon$ számhoz is jó küszöb.

Második témakörünk a végtelenhez tartó sorozatok volt. Ismét két definíciót ismertettem. Az első: minden P valós számra az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(P, +\infty)$ félegyensen kívül (azaz véges sok kivétellel $a_n > P$). A másik definíció: az (a_n) sorozat végtelenhez tart, ha minden $P \in \mathbb{R}$ számhoz található olyan N küszöbszám, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > P$. Beláttuk a két definíció ekvivalenciáját, majd bevezettem a szokásos $a_n \to \infty$, illetve $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ jelöléseket. Példaként megnéztük az $a_n = n$, $a_n = \sqrt{n}$ és $a_n = n-\sqrt{n}$ sorozatok végtelenhez tartását a küszöbszámos definíció szerint.

Következett ezután a $-\infty$-hez tartás két definíciója. Az (a_n) sorozat $-\infty$-hez tart, ha minden P valós számra az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(-\infty, P)$ félegyenesen kívül. Ezzel ekvivalens (az ekvivalenciát házi feladatnak adtam), hogy az (a_n) sorozat $-\infty$-hez tart, ha minden P valós számhoz található olyan N küszöbszám, hogy minden $n > N$ esetén $a_n < P$. Beláttuk, hogy az $a_n = -n$ sorozat határértéke $-\infty$ és házinak adtam az $a_n = -\sqrt{n}$ sorozatot. Ezután a határérték és korlátosság témakörének tárgyalása következett. Beláttuk, hogy ha (a_n) konvergens, akkor korlátos (vagyis az $\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ halmaz korlátos). Az $a_n = (-1)^n$ sorozat példája mutatja, hogy ez megfordítva nem igaz. Igazoltuk, hogy ha $a_n \to \infty$, akkor (a_n) alulról korlátos, de felülről nem korlátos. Kimondtam, hogy ha $a_n \to -\infty$, akkor (a_n) felülről korlátos, de alulról nem; a bizonyítást házi feladatnak adtam.