Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2018. ősz

6. előadás (október 15.)

Az előadás elején egy rövid időre még a korlátos halmazok témaköréhez tértünk vissza. Értelmeztem felülről nem korlátos halmazok szuprémumát, legyen $\sup H = \infty$, illetve alulról nem korlátos halmazok infimumát, legyen $\inf A = -\infty$ (ezek csupán jelölések, $\pm\infty$ nem valós számok). Végül az üreshalmazt néztük meg, amelynek minden valós szám felső és alsó korlátja is egyben. Ekkor egyetlen logikus definíció (megállapodás) az lehet, hogy $\sup \emptyset = -\infty$ és $\inf \emptyset = \infty$.

Ezt követően rátértünk a hatványozás témakörére. Bevezettem az $a^n := a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ jelölést, ha a valós és n pozitív egész. Kimondtam a hatványozás azonosságait, és pár szót ejtettem a bizonyításról (házinak feladtam). Hogy az azonosságok érvényben maradjanak, $a \neq 0$ esetén $a^0 = 1$ (a 0-nak nem értelmezzük 0-adik hatványát), továbbá $a^{-n} = 1/a^n$. Ezután emlékeztettem az n-edik gyök fogalmára, majd definiáltam a racionális kitevőjű hatvány esetét: ha p, q egészek, amelyekre $q > 0$, akkor $a > 0$ esetén legyen $a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p$. Beláttuk, hogy ha $p/q = m/n$, akkor $(\sqrt[q]{a})^p = (\sqrt[r]{s})^s$, így értelmes a definíció.

Mindezek után a valós kitevőjű hatvány értelmezésének ötletével folytattuk: $r < x < s$ (ahol r, s racionális számok) és $a > 1$ esetén szeretnénk, hogy $a^r < a^x < a^s$ legyen (monotonitás). Ehhez segédállításként beláttuk, hogy ha $a > 1$ valós és $r < s$ racionális számok, akkor $a^r < a^s$. Ebből következik, hogy ha $0 < a < 1$ valós és $r < s$ racionális, akkor $a^r > a^s$ (ennek végiggondolását feladtam házinak). Ezzel minden készen áll a valós kitevőjű hatvány értelmezéséhez. Tekintsük a következő halmazokat adott $x \in \mathbb{R}$ és $a > 1$ esetén:

$$A := \{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\}, \qquad B := \{a^s : x < s, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Tételként kimondtam, hogy $\sup A = \inf B$. A bizonyításnak azt a részét megnéztük, hogy $\sup A \leq \inf B$. Valójában azt láttuk be, hogy ha minden $u \in A$ és $v \in B$ esetén $u < v$ (itt elég lenne $u \leq v$ is), akkor szükségképpen $\sup A \leq \inf B$. Ez abból adódik, hogy minden b felső korlátja A-nak, így $\sup A \leq b$, de ekkor $\sup A$ alsó korlátja B-nek, vagyis $\sup A \leq \inf B$. A bizonyítás második felét, nevezetesen az egyenlőség igazolását kihagytam. A tétel után kézenfekvő módon adódik a^x definíciója, amely legyen $a^x := \sup A = \inf B$. Ha $0 < a < 1$, akkor legyen $a^x = (1/a)^{-x}$, végül pedig $1^x = 1$. Ezzel a^x-t minden $a > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmeztük. Nem nehéz belátni, hogy az így definiált hatványfogalom rendelkezik a megszokott műveleti tulajdonságokkal, ezeket csak kimondtam, a bizonyításba nem mentünk bele (a függvényhatárérték segítségével majd nagyon egyszerűen ki fog jönni később). Végül még megfogalmaztam és igazoltam a hatványozás monotonitását: ha $x < y$, akkor $a > 1$ esetén $a^x < a^y$; továbbá azt is bizonyítottuk, hogy minden $a^x > 0$ bármely a és x esetén, amelyre értelmezve van.

Ezt követően rátértünk a sorozatok konvergenciájának témakörére. Először szóban beszéltem a sorozat fogalmáról: egy sorozat valójában függvény, amely a pozitív egészeken van értelmezve, de a fejünkben továbbra is $a_1, a_2, \ldots$ (később a függvény fogalmánál visszautalok majd erre). Sok példát mutattam sorozatok különböző megadására: explicit megadás ($a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $a_n = (-1)^n$), rekurzív (Fibonacci; $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$; $a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}$) és egyéb definícióval adott (a_n az n-edik prímszám; a_n a $\sqrt{2}$ végtelen tizedestört alakjának n-edik tizedes jegye; kérdés, hogy ez utóbbiak vajon megadhatók-e explicit alakban?). Ezután az $a_n = 1/n$, $a_n = (-1)^n/n$ és $a_n = (-1)^n$ sorozatok kapcsán megfigyeltük a 0-hoz tartás és nemtartás jelenségét. A példák által motiválva kimondtam a sorozat határértékének kétféle definícióját: az (a_n) sorozat határértéke a $b \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén $a_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ véges sok kivétellel teljesül (más szóval az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ intervallumon kívül). A másik definíció: az (a_n) sorozat határértéke $b \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |a_n - b| < \varepsilon.$$

Tételként kimondtam, hogy a két definíció ekvivalens, de a bizonyításra nem jutott már idő. Ehelyett megfogalmaztam a konvergens és divergens sorozat fogalmát.