Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2018. ősz

5. előadás (október 8.)

A múlt órán a tizedes törtek kapcsán három kérdést fogalmaztam meg, és a válaszokat is megadtam, de bizonyításra nem jutott idő. Most konstruktív módon bebizonyítottuk, hogy minden $x \geq 0$ számnak van végtelen tizedestört alakja (sőt olyat gyártottunk, hogy a fenti egyenlőtlenségekben a jobb oldalon szigorú egyenlőtlenség teljesül). Kimondtam (de nem igazoltam), hogy a végtelen tizedes tört alak egyértelmű, kivéve ha x pozitív véges tizedes tört alakban felírható szám. Ekkor kétféle végtelen tizedes tört alakja van $(\dots, \dots a_k 00000\dots$ és $\dots, \dots (a_k - 1)999\dots$, tehát az egyikben egy indextől kezdve minden jegy 0, a másikban pedig csupa 9). Végül pedig a Cantor-axióma segítségével megmutattuk, hogy minden végtelen tizedestört egyértelműen meghatároz egy valós számot, amelynek az a végtelen tizedestört alakja. A bizonyítás azon múlt, hogy a végtelen sok egyenlőtlenséget zárt intervallumok metszetére lehet átfogalmazni, amely a Cantor-axióma miatt nem üres, és egyelemű az arkhimédészi aximóma következményeként.

Ezek után belekezdtünk a korlátos halmazok témakörébe. Értelmeztük egy H valós számhalmaz legnagyobb elemének (maximumának) és legkosebb elemének (minimumának) fogalmát. Mindkettő a halmaz eleme kell hogy legyen, a maximumnál nincs nagyobb elem a halmazban, a minimumnál nincs kisebb. Bevezettük a $\max H$ és $\min H$ jelöléseket és néztünk sok példát: megbeszéltük, hogy nemüres véges halmaznak van maximuma és minimuma (ez az elemszámra vonatkozó indukcióval igazolható); voltak további példaként az $[a, b]$ és (a, b) intervallumok (előbbinek van maximuma és minimuma is, utóbbinak egyik sincs, mert bármely $x \in (a, b)$ esetén $(x + b)/2 > x$ és $(a + x)/2 < x$), valamint az $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ halmaz. Ez utóbbinak azért nincs minimuma, mert minden pozitív egész n-re $1/n > 1/(n + 1)$.

Ezután az alsó és felső korlát értelmezésével folytattuk. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak a $P \in \mathbb{R}$ szám felső korlátja, ha minden $h \in H$ esetén $h \leq P$. Egy halmazt felülről korlátosnak mondunk, ha van felső korlátja. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak a $P \in \mathbb{R}$ szám alsó korlátja, ha minden $h \in H$ esetén $h \geq P$. Egy halmazt alulról korlátosnak mondunk, ha van alsó korlátja. Ismét néztünk sok példát. Láttuk, hogy az $[a, b]$ és (a, b) intervallumoknak b egy felső korlátja, és minden, b-nél nagyobb szám is felső korlát. Hasonlóan, az $[a, b]$ és (a, b) halmazoknak a egy alsó korlátja, és minden, a-nál kisebb szám is az. Ezenkívül megnéztük az $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ halmazt, amelynek az 1 felső korlátja, és a 0 alsó korlátja. Megjegyeztem, hogy ha van legnagyobb elem, akkor az persze felső korlát is egyben (hasonlóan: minimum mindig alsó korlát), de ez visszafele nem igaz: az (a, b) intervallumnak van felső korlátja, de nincs maximuma. Megbeszéltük azt is, hogy a pozitív egész számok halmazának nincs felső korlátja, mert minden valós számnál van nagyobb pozitív egész. Végül azt is láttuk, hogy a valós számok halmaza felülről nem korlátos, hiszen bármely P valós számnál van nagyobb pozitív egész (ami egyben valós).

Ezután kimondtam – a példák által valamennyire illusztrált – teljességi tételt, amely szerint minden nemüres felülről korlátos H számhalmaznak van legkisebb felső korlátja. Intervallumfelezéssel bizonyítottunk, legyártottuk az $[a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott intervallumsorozatot a következő tulajdonságokkal: a_n nem felső korlátja A-nak, b_n felső korlátja A-nak, továbbá $b_n - a_n = (b_{n-1} - a_{n-1})/2$. A Cantor-axióma garantál egy elemet az intervallumok metszetében, és az arkhimédészi axióma alapján nem nehéz meggondolni, hogy a metszet szükségképpen egyelemű. Végül indirekt módon beláttuk, hogy x felső korlát, továbbá x-nél nincs kisebb felső korlát (az ellentmondás mindkét esetben az lett, hogy találtunk a metszetben egy másik elemet is).

A teljességi tételnek az alsó korlátra vonatkozó párja úgy szól, hogy minden nemüres alulról korlátos halmaznak van legnagyobb alsó korlátja (ezt nem igazoltam, de érdemes végiggondolni, ezzel ellenőrizhető, hogy értjük-e a bizonyítást).

A teljességi tételek alapján definiáltuk H nemüres felülről korlátos halmaz szuprémumát (felső határát), amelyet $\sup H$-val jelölünk. Hasonló módon, ha H nemüres alulról korlátos halmaz, akkor a legnagyobb alsó korlátját a halmaz infimumának nevezzük és $\inf H$-val jelöljük. Példaképpen megbeszéltük (vázlatosan le is írtam), hogy $\sup(a, b) = b$, $\inf(a, b) = a$, $\sup\{1, 1/2, 1/3, \dots\} = 1$, $\inf\{1, 1/2, 1/3, \dots\} = 0$.