

Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak kerestfélév, 2018. ősz

4. előadás (október 1.)

Az előadás elején befejeztük a múlt órán félbehagyott bizonyítást. beláttuk, hogy bármely két különböző valós szám között található racionális.

Ezután elismételtem a valós számok eddig bevezetett axiómáit: test, rendezési és arkhimédészi. Ezeket mind teljesíti a racionális számok teste is, így szükség van még axiómára, hogy a valós számokat kapjuk. Ez lesz a Cantor-axióma (más felépítésben lehetne ettől eltérő is). Az axióma kimondása előtt bevezettem az egymásba skatulyázott intervallumok sorozatának fogalmát: $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, ahol végtelen sok intervallumról van szó, és a tartalmazások iránya is fontos! A Cantor-axiómában azt követeljük meg, hogy egymásba skatulyázott zárt intervallumok metszete nem üres. Lényeges, hogy zárt intervallumokról van szó, példaként az arkhimédészi axióma segítségével beláttam, hogy a $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n) = \emptyset$. Azt is megjegyeztem, hogy zárt félegyenesek metszete lehet üres: $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, \infty) = \emptyset$. Ezzel megvan minden axióma, és a valós számok halmazára (\mathbb{R}) úgy tekintünk, mint egy olyan struktúra, amely teljesíti mind a 15 axiómát.

Rátértünk ezután a négyzetgyök és n -edik gyök témakörére. Kérdés: van-e minden pozitív valós számnak négyzetgyöke (vagyis olyan valós szám, amelynek négyzete az adott szám), és ha igen, akkor egyértelmű-e? A létezés előtt segédállításként igazoltam, hogy ha $0 < b_1 < b_2$, akkor $b_1^2 < b_2^2$. Majd tételként kimondtam, hogy minden $a > 0$ számhoz található olyan $b > 0$ szám, amelyre $b^2 = a$. A bizonyítás fő gondolata az intervallumfelezési eljárás („oroszlánfogás”). Konstruáltunk olyan $I_n = [a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumokat (speciálisan $a_1 = 0, b_1 = a + 1$, amelyekre $a_n^2 \leq a \leq b_n^2$, továbbá $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$). Ekkor a Cantor-axióma miatt a metszetük nem üres, legyen egy eleme x . Nem nehéz megmutatni (becsléssel), hogy $|x^2 - a| \leq c/n$, ami (az arkhimédészi axióma miatt) csak úgy lehetséges, hogy $x^2 = a$. A létezés után az egyértelműség jött, de ez nyilvánvalóan következik a segédállításból. Szokásos jelölés: $b = \sqrt{a}$. Hasonlóan igazolható (de nem láttam be), hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $a > 0$ számokhoz egyértelműen létezik $b > 0$ szám, amelyre $b^n = a$. Jelölése $\sqrt[n]{a}$.

Ezt követően rátértünk a tizedes törtekre. Megbeszéltük, hogy véges tizedes tört alatt az

$$n, a_1 a_2 \dots a_k = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k}{10^k}$$

alakú véges összeget értjük, ahol $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ és $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Azt mondjuk, hogy az $x \geq 0$ szám végtelen tizedes tört alakja $n, a_1 a_2 a_3 \dots$, ha $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ és $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ (ahol $j = 1, 2, 3, \dots$), továbbá

$$\begin{aligned} n &\leq x \leq n + 1, \\ n, a_1 &\leq x \leq n, a_1 + \frac{1}{10}, \\ &\vdots \\ n, a_1 a_2 \dots a_k &\leq x \leq n, a_1 a_2 \dots a_k + \frac{1}{10^k}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

(Ez végtelen sok egyenlőtlenség! Később majd végtelen összegként is tudjuk értelmezni, de egyelőre kevés eszközünk van ahhoz.) Három kérdést fogalmaztam meg: létezik-e minden nemnegatív valós számnak végtelen tizedes tört alakja? Ha igen, akkor egyértelmű-e? Adott végtelen tizedes törthöz található-e olyan x valós szám, amelynek éppen az a végtelen tizedes tört alakja? Felírtam a válaszokat, de a bizonyításra már nem jutott idő.