Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2018. ősz

11. előadás (december 3.)

Az óra elején a Cauchy-kritériumot tárgyaltuk, ami a konvergencia egy ekvivalens megfogalmazását adja: az (a_n) sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található N küszöb, hogy minden $n, m > N$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Ez utóbbi tulajdonsággal rendelkező sorozatokat szokás Cauchy-sorozatnak hívni (tehát a tétel szerint egy sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat). A konvergenciából a Cauchy-tulajdonság egyszerűen következik a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával („ha a_n és a_m mindketten közel vannak a határértékhez, akkor egymáshoz is közel vannak"). A másik irány gondolata a követkeő volt: ha (a_n) Cauchy, akkor korlátos, így a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint van konvergens részsorozata, de ekkor (a_n) is szükségképpen konvergens. A korlátosság hasonlóan adódott, mint amikor a konvergens sorozatok korlátosságát igazoltuk. Ha pedig $a_{n_k} \to a$ és (a_n) Cauchy, akkor ismét a háromszög-egyenlőtlenség segítségével nyerjük, hogy $a_n \to a$ („egy küszöbtől kezdve bármely két tag közel van egymáshoz, de ekkor bármely a_n közel van egy olyan a_{n_k}-hoz is, amely közel van a-hoz, tehát a_n is közel van a-hoz"). A Cauchy-kritérium lényege, hogy a konvergenciát úgy fogalmazza át, hogy a sorozat határértékére nincs szükségünk.

Ezzel a sorozatok témakörét lezártuk, és röviden előrevetítettem a folytatást (függvények jönnek egészen az integrálszámítás témakör végéig).

Ezután belekezdtünk a függvények témakörbe. A függvény, leképezés, hozzárendelés szavak szinonímák. Egy $f\colon A \to B$ függvény kapcsán megbeszéltük az értelmezési tartomány, értékkészlet fogalmakat és jelöléseiket. Ezt követően az injektív, szürjektív és bijektív tulajdonságokat definiáltuk és néztünk példát is (az $f\colon A \to B, f(x) = x^2$ függvény különböző A, B valós számhalmazokkal). Hangsúlyoztam, hogy például az a kérdés, hogy az x^2 függvény a legbővebb halmazon értelmezve szürjektív-e, értelmetlen matematikailag (mert lényeges, hova képezőnek tekintjük). Injektív vagy bijektív függvény esetén értelmeztük az inverz fogalmát, amely $f^{-1}\colon R(f) \to D(f)$, és $f^{-1}(b) = a$, ha $f(a) = b$.

Megbeszéltük, hogy $D(f) = \mathbb{N}^+$ esetén végtelen sorozatról beszélhetünk, $D(f) = \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén pedig n tagú sorozatról. Speciálisan a kéttagú sorozatot szokás rendezett párnak hívni. Az A, B halmazokból képzett rendezett párok halmaza az $A \times B$ Descartes-szorzat. Egy függvény grafikonja $\operatorname{graph} f = \{(a, f(a)) : a \in A\}$, amely részhalmaza $A \times B$-nek. Speciálisan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény esetén a grafikon a sík részhalmaza.

Rátértünk a valós függvényekre: $D(f) \subset \mathbb{R}$ és $R(f) \subset \mathbb{R}$. Értelmeztük a függvények közötti műveleteket: összeg, különbség, szorzat, hányados és kompozíció. Definiáltuk az értelmezési tartományokat (például $D(f/g) = \{x \in D(f) \cap D(g) : g(x) \neq 0\}$) és a hozzárendelési szabályt (például $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$). Felhívtam a figyelmet, hogy a kompozíció művelete általában nem felcserélhető (példát is adtunk).

Ezután valós függvények különböző tulajdonságait ismételtük át. Az alábbi definíciók szerepeltek: páros, páratlan, periodikus függvény (itt példaképpen beláttuk, hogy a Dirichlet-függvénynek minden nemnulla racionális szám periódusa). Ezután következett az adott halmazon alulról és felülről korlátosság (példaként a törtrész-függvényt mutattam), (szigorú) monoton növekedés (példaként az x^2 függvényt mutattam a $(0, \infty)$-en) és csökkenés definíciója.

Az óra utolsó részében a konvexitás fogalmával ismerkedtünk meg. A grafikus motiváció után konvexnek neveztünk egy függvényt egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha az intervallum bármely $a < b$ pontjai esetén esetén minden $a < x < b$ közbülső pontra $f(x) \leq h_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)$. (Szemléletesen „a grafikon a húr alatt fekszik az (a, b) intervallumon".) Egy függvényt konkávnak hívunk, ha $(-f)$ konvex, vagyis az előző definícióban az $f(x) \geq h_{a,b}(x)$ módosítást kell végrehajtani. Szigorúan konvex, illetve szigorúan konkáv egy függvény, ha az iménti egyenlőtlenségekben szigorú egyenlőtlenség érvényes. Itt megjegyeztem, hogy $h_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b)$ is helyes képlet, annak ellenére, hogy ránézésre nem ugyanaz. Másrészt felhívtam a figyelmet, hogy nem csupán a grafikon két végpontját összekötő húrt kell tekinteni, hanem az összeset! Ennek kapcsán még egy ellenpéldát is felrajzoltam, egy konvex függvényt „elrontottunk egy huplival".