Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2018. ősz

10. előadás (november 26.)

Folytattuk a nagyságrendek témakörét, amelyet félbehagytunk a múlt órán. Rögtön egy segédállítással kezdtük: ha $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$, akkor $a_n \to 0$. Valójában azt láttuk be a bizonyítás során, hogy ha az (a_n) sorozathoz található olyan $r < 1$ szám, amelyre egy indextől kezdve $|a_{n+1}/a_n| < r$, akkor $a_n \to 0$. Mindez a rendőrelv segítségével jött ki. Láttuk, hogy ha a szóban forgó limesz 1, akkor nem igaz az állítás, ellenpélda bármely nemnulla konstans sorozat. A segédállítást két sorozatra alkalmaztuk, méghozzá az n^k/a^n, $a^n/n!$ ($k > 0$ egész és $a > 1$ valós) sorozatok esetén, és igazoltuk ezzel, hogy 0-hoz tartanak, vagyis n^k-nál gyorsabban tart végtelenhez a^n $(a > 1)$, és ez utóbbinál gyorsabban tart végtelenhez $n!$. Röviden tehát: $n^k \prec a^n \prec n! \prec n^n$.

Ezt követően az előadás fő témája a monotonitás és határérték kapcsolata volt. Először definiáltam, hogy egy sorozat monoton növekedése és csökkenése, valamint szigorú monotonitása mit jelent. Ezután beláttuk, hogy minden monoton sorozatnak van véges vagy végtelen határértéke, pontosabban ha (a_n) monoton növő és felülről korlátos, akkor $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\} \in \mathbb{R}$; ha (a_n) monoton növekedő és felülről nem korlátos, akkor $\lim a_n = \infty$; ha (a_n) monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor $\lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$; végül ha (a_n) monoton csökkenő és alulról nem korlátos, akkor $\lim a_n = -\infty$ (a csökkenő esetek meggondolásást házi feladatnak adtam).

Alkalmazásként az $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ rekurzív sorozat határértékét kerestük meg. Indukcióval beláttuk, hogy monoton növő, majd igazoltuk, hogy (például) az 1000 egy felső korlátja. Ekkor a tétel szerint konvergens, a rekurzióban elvégezhető a határátmenet, és a határértékre -1 vagy 2 adódik, amelyek közül a negatív kizárható, hiszen a_n nemnegatív sorozat, így a limesze is az (a limesz és egyenlőtlenségek kapcsolatáról szóló tétel alapján).

Második alkalmazásként az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatot vizsgáltuk. A számtani és mértani közepek segítségével megmutattuk, hogy szigorúan monoton növekedő. Hasonlóan látható, hogy a $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat monoton csökkenő. Mivel $a_n < b_n$, ezért a_n felülről korlátos, b_n alulról korlátos (ráadásul $2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4$), tehát mindkettő konvergens. Sőt, a határértékük megegyezik, hiszen $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$. A közös határérték a nevezetes $e \approx 2,7182$ szám, amely a későbbi félévekben még sokszor elő fog kerülni.

Az óra vége felé a sorozatok témakörének „csúcspontjaként” A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételt fogalmaztam meg: minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata. A bizonyításhoz beláttuk, hogy minden sorozatnak van monoton részsorozata. Ennek igazolása a csúcs (házi elnevezés) segítségével történt („felkelő nap”). Az a_n csúcs tag a sorozatban, ha minden $m > n$ esetén $a_m < a_n$. Ha végtelen sok csúcs van, akkor azok szigorúan csökkenő sorozatot alkotnak, véges sok csúcs esetén pedig nem nehéz monoton növekedő sorozatot találni: van olyan N, hogy minden $n > N$ esetén a_n nem csúcs, ekkor legyen például $a_{n_1} := a_{N+1}$; ha már a_{n_k} megvan, akkor mivel ő nem csúcs, ezért van olyan $n_{k+1} > n_k$, hogy $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$; ezzel egy monoton növő részsorozatot találtunk.

Az óra végén a Cauchy-kritériumra tértünk rá. Definiáltuk a Cauchy-sorozat fogalmát: (a_n) Cauchy-sorozat ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található N küszöb, hogy minden $n, m > N$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Kimondtuk a Cauchy-kritériumot, amely szerint (a_n) pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat. A bizonyítás gondolatát vázoltam: a konvergenciából a Cauchy-tulajdonság egyszerűen következik a háromszög-egyenlőtlenség segítségével, a másik irányhoz a korlátosságot és a Bolzano–Weierstrass tételt kell használni: kiválasztunk egy konvergens részsorozatot, majd a háromszög-egyenlőtlenséggel belátjuk, hogy az egész sorozat konvergens.