Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak keresztfélév, 2018. ősz

1. előadás (szeptember 10.)

Az óra elején megszavaztuk, hogy 8:00-kor kezdünk, és 45 perc után tartunk egy 5 perces szünetet, így 9:35-ig tart az óra. Ezután röviden elmondtam a tárggyal kapcsolatos legfontosabb információkat (számonkérés, jegyzet stb.); a gyakorlatokról nem szóltam semmit, majd a gyakorlatvezető fog mindenről tájékoztatni; egyébként minden részletesen elolvasható az `abesenyei.web.elte.hu` oldalon. A bevezető rész végén még a tematikáról is ejtettem szót.

Ezután belevágtunk a logika témakörébe. Kicsit beszéltem arról, mi a logika („a helyes következtetések tudománya"), és megemlítettem, hogy a matematikában a logika és a józan ész segítségével alapigazságokból tételeket vezetünk le (bizonyítunk). Megbeszéltük, hogy logikai állításon olyan kijelentést értünk, amelynek az igazságértéke egyértelműen eldönthető, majd rátértünk a logikai műveletekre ($\wedge, \vee, \implies, \iff, \neg$), amelyekkel állításokból újabb állításokat készíthetünk. Pontosan definiáltuk az így gyártott állítások mindegyikének igazságértét (vagyis, hogy mikor igaz és mikor hamis; az egyik esetben egy logikai táblázatot is felírtunk). Az $A \vee B$ kapcsán felhívtam a figyelmet, hogy a matematikában a „vagy" mindig megengedő és nem kizáró. Humoros példaként a jól ismert „Ön dönt, iszik vagy vezet." felhívást idéztem, amelyet a hétköznapokban másképp értelmezünk (egyszerre nem engedjük meg az ivást és a vezetést is), mint a matematikában (itt megengedjük, hogy a vagy kapcsolat mindkét tagmondata igaz legyen). Az $A \implies B$ következtetés ürügyén pedig egy kicsit elidőztünk azon, hogy a „Hamis állításból minden következik.", amelynek illusztrációjaként szóban bebizonyítottam, hogy „ha $1 = 2$, akkor én vagyok a pápa" (szerencsére $1 \neq 2$).

Ezt követően tisztáztuk a különböző logikai műveletek és a tagadás kapcsolatát, ezek az úgynevezett de Morgan-féle azonosságok, pl. $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$ (de Morgannel kapcsolatban házi feladatként feladtam, hogy vajon mikor születhetett, ha egyszer az életkorát kérdezőknek azt válaszolta, hogy „x éves voltam az x^2 évben").

Következett ezután a nyitott mondat „fogalma" (olyan állítás, amelynek igazságértéke egy vagy több változótól függ), majd bevezettük az univerzális ($\forall$) és egzisztenciális ($\exists$) kvantorokat, és megbeszéltük az igazságértéküket, tagadásukat: $\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$, $\neg(\forall x A(x)) = \exists x \neg A(x)$, $\neg(\exists x A(x)) = \forall x \neg A(x)$. Végül megjegyeztem, hogy ha egy $A(x) \implies B(x)$ típusú állítást látunk, akkor általában odaértjük elé, hogy minden x-re (és így a tagadása úgy fog kezdődni, hogy van olyan x, amelyre...).

Rátértünk ezt követően a bizonyítási módszerekre, először az indirekt bizonyítás menetét néztük meg. Példaképpen a $\sqrt{2}$ irracionalitását igazoltam, de nem az elcsépelt bizonyítással, hanem a következőt mondtam el (itt csak nagyon tömören vázolom): indirekt, legyen q a legkisebb pozitív egész szám, amelyre $\sqrt{2} = p/q$ egész. De akkor $\sqrt{2} = (2q - p)(p - q)$, ahol $p - q$ is pozitív egész, amely ráadásul kisebb, mint q, ami ellentmond q minimalitásának.

Majd jött a teljes indukció legegyszerűbb formája: ha A_1 igaz, és $\forall n(A_n \implies A_{n+1})$, akkor ezzel beláttuk, hogy $A_1, A_2, A_3, \ldots$ mind igazak. Megjegyeztem, hogy gyakran nem A_1 a kiinduló állítás, ilyenkor nyilván onnatól kezdve láttuk be az A_n állítások igazságát.

Az óra végén a teljes indukció alkalmazásaként igazoltuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget a szokásos teljes indukciós okoskodással (közben felhívtam a figyelmet arra, hogy egy „Tétel"-nek mindig vannak feltételei, és érdemes nyomon követni, hogy a bizonyításban hol használjuk azokat). Az egyenlőség esetét felírtam megjegyzésként és kértem, hogy gondolják át a bizonyítás alapján.