Bevezető analízis előadás

Rövid ciklusú matematikatanár szak, 2018. ősz

6. alkalom (december 6.)

Az óra elején átismételtük sorok konvergenciájának fogalmát, majd definiáltam a divergenciát. Példaként megnéztük a harmonikus sor divergenciáját. A bizonyítás 2^n-es csoportosítással és alsó becsléssel igazolta, hogy $s_{2^n} \geq 1 + n/2$, tehát (s_n) felülről nem korlátos. Megnéztük ezután a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját, hasonló csoportosítással, csak most felső becslésre volt szükségünk. Kimondtam, hogy általában a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$ hiperharmonikus sor pontosan akkor konvergens, ha $c > 1$. Kicsit meséltem a hiperharmonikus sor összegéről c pozitív egész esetén ($c = 2$-re az összeg $\pi^2/6$, páros α-ra π^{2k}-szor egy racionális szám, páratlan α esetén az $\alpha = 3$ kivételével azt sem tudjuk, hogy racionális vagy irracionális-e.)

Ezt követően a konvergenciával kapcsolatos néhány elemi tulajdonságot tekintettünk át. Először a sor konvergenciája és az algebrai műveletek kapcsolatát tisztáztuk: ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ is konvergens és összege $c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; ha $\sum_{n=1}^{\infty}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergensek, akkor $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ is konvergens és összege $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ezután következett a triviális kritérium: ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$sor konvergens, akkor $a_n \to 0$. A harmonikus sor példája mutatja, hogy a triviális kritérium csak szükséges feltétel a konvergenciához.

Kimondtam az összehasonlító (majoráns és minoráns) kritériumokat. Felhívtam a figyelmet arra, hogy a nemnegativitás lényeges, hiszen $a_n = -1 \leq b_n = 1/n^2$ választással $\sum b_n$ konvergens, de $\sum a_n$ divergens. Néztünk két példát az összehasonlító kritériumok alkalmazására: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergenciáját, amely az $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ becslésből és a minoráns kritériumból következik; továbbá $\sum \frac{1}{n^3}$ konvergenciáját, amely az $\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$ becslésből és a majoráns kritériumból következik.

Belekezdtünk a függvények témakörbe. A függvény, leképezés, hozzárendelés szavak szinonímák. Egy $f\colon A \to B$ függvény kapcsán megbeszéltük az értelmezési tartomány, értékkészlet fogalmakat és jelöléseiket. Ezt követően az injektív, szürjektív és bijektív tulajdonságokat definiáltuk és néztünk példát is (az $f\colon A \to B, f(x) = x^2$ függvény különböző A, B valós számhalmazokkal). Hangsúlyoztam, hogy például az a kérdés, hogy az x^2 függvény a legbővebb halmazon értelmezve szürjektív-e, értelmetlen matematikailag (mert lényeges, hova képezőnek tekintjük). Injektív vagy bijektív függvény esetén értelmeztük az inverz fogalmát, amely $f^{-1}\colon R(f) \to D(f)$, és $f^{-1}(b) = a$, ha $f(a) = b$.

Megbeszéltük, hogy $D(f) = \mathbb{N}^+$ esetén végtelen sorozatról beszélhetünk, $D(f) = \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén pedig n tagú sorozatról. Speciálisan a kéttagú sorozatot szokás rendezett párnak hívni. Az A, B halmazokból képzett rendezett párok halmaza az $A \times B$ Descartes-szorzat. Egy függvény grafikonja $\operatorname{graph} f = \{(a, f(a)) : a \in A\}$, amely részhalmaza $A \times B$-nek. Speciálisan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény esetén a grafikon a sík részhalmaza.

Ezután valós függvények különböző tulajdonságait ismételtük át. Az alábbi definíciók szerepeltek: páros, páratlan, periodikus függvény (itt beszéltünk az egész- és törtrész-függvényekről), (szigorú) monoton növekedés (példaként az x függvényt mutattam) és csökkenés.