Bevezető analízis előadás

Rövid ciklusú matematikatanár szak, 2018. ősz

5. alkalom (november 22.)

Az órát az e szám témakörével kezdtük. A számtani és mértani közepek egyenlőtlenségének segítségével beláttuk, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan monoton növekedő. Kimondtam, hogy felülről korlátos is, tehát konvergens. A határértékét jelöltük e-vel, az az Euler-féle szám. Hasonlóan látható, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és ugyancsak e-hez tart.

Ezután részsorozatokról beszéltünk. Ha $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ pozitív egészek sorozata, akkor a $b_k = a_{n_k}$ sorozat az (a_n) sorozat egy részsorozata. A definíció alapján ismét könnyű látni, hogy ha (a_n)-nek a határértéke a (amely lehet véges vagy végtelen, akkor minden részsorozatának is ez a határértéke. A részsorozatok témakörében fontos eredmény a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételt fogalmaztam meg: minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata. A bizonyítás azon múlik, hogy minden sorozatnak van monoton részsorozata.

Belekezdtünk a végtelen sorok témakörébe. Először néhány motivációs példát írtam fel. A szokásos általános iskolás okoskodással beláttuk, hogy $0{,}99999\cdots = 1$: ha a szóban forgó szám x, akkor $10x-x = 9$, tehát $x = 1$. Ezzel a gondolatmenettel azonban vigyázni kell, mert ilyen módon az $x = 1+2+2^2+\dots$ összegre $2x - x = -1$, vagyis $x = -1$ adódik. Hasonló módon, $x = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots$ esetén $x-1 = -x$, ezért $x = 1/2$. Világos, hogy egyik esetben sem megalapozott a műveletek elvégzése, hiszen az axiómák nem szólnak végtelen sok tagú összegekről.

Adott (a_n) sorozat esetén bevezettük a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ (formális) végtelen sort. A sor részletösszegei az $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, stb. sorozat tagjai. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens és összege $A \in \mathbb{R}$, ha a részletösszegekből álló (s_n) sorozat konvergens és limesze A.

Ezután példákat néztünk. Az $a_n = 0$ esetben a sor konvergens és összege 0; az $a_n = (-1)^n$ esetben $s_{2n+1} = -1$ és $s_{2n} = 0$, amely sorozat oszcillálva divergens (a miértet szóban megbeszéltük részsorozatokkal), ezért a sor divergens és nincs összege. Ezután az $a_n = 9/10^n$ példáját néztük, és beláttuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$sor konvergens és összege 1. Általában az $a_n = q^n$ sororzatból képződik a mértani sor, és (a mértani sorozat első n tagjának összegképlete és a q^n sorozat korábbi tanulmányaink során megismert határértékei alapján) az pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$.

Az óra végén elmeséltem Akhilleusz és a teknősbéka paradoxonát (Akhilleusz 1 métert, a teknősbéka 1/10 métert tesz meg másodpercenként; ha Akhilleusz 1 méter előnyt ad a teknősnek, akkor sosem éri utol, mert mialatt a teknős adott időpontbeli helyére ér, addigra a teknős már továbbment).