Bevezető analízis előadás

Rövid ciklusú matematikatanár szak, 2018. ősz

4. alkalom (november 9.)

Belekezdtünk a sorozatok konvergenciájának témakörébe. Az $a_n = 1/n$, $a_n = (-1)^n/n$ és $a_n = (-1)^n$ sorozatok kapcsán megfigyeltük a 0-hoz tartás és nemtartás jelenségét. A példák által motiválva megfogalmaztam a sorozat határértékének „küszöbszámos” definícióját: az (a_n) sorozat határértéke $b \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |a_n - b| < \varepsilon.$$

Bevezettük a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ és $a_n \to b$ jelöléseket. Ezt követően példákat néztünk határértékre és küszöbszámokra: $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(-1)^n/n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ (ez utóbbinál a „fáradékony bolha” tréfás elnevezést mondtam).

Némi motiváció után a határérték egy ekvivalens megfogalmazását adam meg: az (a_n) sorozat határértéke a $b \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén $a_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ véges sok kivétellel teljesül (más szóval az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ intervallumon kívül). Ennek segítségével beláttuk, hogy az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak nincs határértéke (előtte felírtam, hogy a „küszöbös” definícióval mit kellene igazolni – eléggé komplikált). Bevezettem a konvergens és divergens sorozat elnevezéseket: konvergens egy sorozat, ha van olyan b valós szám, amely határértéke; divergens, ha nem konvergens, vagyis nincs olyan b valós szám, amely határértéke lenne.

A két definícióval kapcsolatban tettünk még néhány észrevételt: ha ε-hoz N jó küszöb, akkor minden N-nél nagyobb szám is jó küszöb ugyanehhez az ε-hoz; ha N jó küszöb ε-hoz, akkor minden $\varepsilon' > \varepsilon$ számhoz is jó küszöb; ha a $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ intervallumon kívül csak véges sok tagja van a sorozatnak, akkor belül végtelen sok, azonban fordítva nem igaz (pl. $(-1)^n$, $b = 1$, $\varepsilon = 1/2$).

Ezt követően a végtelenhez tartó sorozatok témakörével kezdtünk foglalkozni. Először a küszöbszámos definíciót mondtam el: az (a_n) sorozat végtelenhez tart, ha minden $P \in \mathbb{R}$ számhoz található olyan N küszöbszám, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > P$. Bevezettük a szokásos jelölést, majd példákat néztünk: $a_n = n$, $a_n = \sqrt{n}$, $a_n = n - \sqrt{n}$. Ezután megbeszéltük a küszöbmentes ekvivalens defníciót: minden P valós számra az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(P, +\infty)$ félegyensen kívül (azaz véges sok kivétellel $a_n > P$). Példaképpen megmutattuk, hogy az $a_n = (-2)^n$ sorozat nem tart ∞-hez.

Következett ezután a $-\infty$-hez tartás két definíciója. Az (a_n) sorozat $-\infty$-hez tart, ha minden P valós számra az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(-\infty, P)$ félegyenesen kívül. Ezzel ekvivalens, hogy az (a_n) sorozat $-\infty$-hez tart, ha minden P valós számhoz található olyan N küszöbszám, hogy minden $n > N$ esetén $a_n < P$. Beláttuk, hogy az $a_n = -n^2$ sorozat határértéke $-\infty$. Bevezettem az oszcillálva divergens sorozat elnevezést az olyan sorozatokra, amelyeknek se véges, se $\pm\infty$ határértéke nincs. Tisztáztuk, hogy ha (a_n) divergens, akkor lehet $a_n \to \infty$, $a_n \to -\infty$ és (a_n) oszcillálva divergens is. Ha pedig azt mondjuk, hogy (a_n)-nek van határértéke, akkor az jelentheti, hogy konvergens, $a_n \to \infty$ vagy $a_n \to -\infty$.

Rátértünk ezt követően a limesz és műveletek kapcsolatára, az összeadással kezdtük. Egy táblázatba foglalva kimondtam, hogy ha $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor mit mondhatunk az $(a_n + b_n)$ összegsorozat határértékéről. Beláttuk, hogy ha $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, akkor $a_n + b_n \to a + b$ (a bizonyításban a háromszögegyenlőtlenséget használtuk); ha $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$; ha $a = \infty$, $b = \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$; többit házinak adtam ezek alapján meggondolni. A táblázatban két helyen kérdőjeleket hagytunk, amelyek a kritikus határértékeket jelentik, konkrétan, amikor a és b közül az egyik ∞, a másik pedig $-\infty$. Ebben az esetben $a_n + b_n$ viselkedése a konkrét sorozatoktól függ, mind a négy kategóriába eső példát lehet adni, és adtunk is: $a_n = n + c$, $b_n = -n$ esetén $a - n + b_n = c \to c$; $a_n = 2n$, $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = n \to \infty$; $a_n = n$, $b_n = -2n$ esetén $a_n + b_n = -n \to -\infty$; $a_n = n + (-1)^n$, $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = (-1)^n$.

Hátravan a limesz és szorzás, valamint a limesz és hányados kapcsolata. Rögtön ki is mondtam azt a tételt, hogy mit mondhatunk a $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ határértékről, amennyiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = a$: a választ egy táblázatban foglaltuk össze. A kritikus határértékekre is néztünk példát, méghozzá láttuk, hogy $a = 0$, $b = \infty$ esetén a szorzatsorozat viselkedése mind a négyféle kategóriába eshet: $a_n = 1/n$, $b_n = n$ esetén $a_n b_n = 1$, tehát konvergens; $a_n = 1/n$, $b_n = n^2$ esetén $a_n b_n = n$, tehát

$a_nb_n \to \infty$; $a_n = -1/n$, $b_n = n^2$ esetén $a_nb_n = -n \to -\infty$; $a_n = (-1)^n/n$, $b_n = n$ esetén $a_nb_n = (-1)^n$ oszcillálva divergens.

Végül a limesz és műveletek témakörben a hányados műveletére tértünk rá. Mivel definíció szerint $a_n/b_n = a_n \cdot (1/b_n)$, ezért elég a reciprokot vizsgálni, utána alkalmazható a szorzásra vonatkozó tétel. Kimondtam, hogy ha $b_n \to b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor $1/b_n \to 1/b$; ha pedig $b_n \to \infty$ vagy $b_n \to -\infty$, akkor $1/b_n \to 0$. Megjegyeztem, hogy ha $b_n \to 0$, akkor $(1/b_n)$ kritikus limesz: $b_n = 1/n$ esetén $1/b_n = n \to \infty$, $b_n = -1/n$ esetén $1/b_n = -n \to -\infty$ és $b_n = (-1)^n/n$ esetén $1/b_n = (-1)^n n$ oszcillálva divergens. Itt megkérdeztem, hogy vajon miért nem beszéltem negyedik esetről, tehát előfordulhat-e, hogy $b_n \to 0$, és $(1/b_n)$ konvergens? Végül házinak feladtam, hogy írjuk fel a hányados limeszére vonatkozó táblázatot.

Megjegyeztem, hogy a limesz és összeadás kapcsolata két tag helyett véges sok (pl. három) tagra is átvihető. De vigyázzunk, mert például az n tagú $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$ összeg minden tagja 0-hoz tart, és az összeg minden n-re 1 (itt azért nem használhatjuk a tételünket, mert az összeg tagjainak száma nem fix).

Azt is megjegyeztem, hogy a limesz és szorzás kapcsolatára vonatkozó tétel csak véges sok (rögzített számú) tényező esetére alkalmazható. Például n tényezőből álló $(1 + \frac{1}{n})^n$ szorzat, amely „tényezőnként 1-hez tart”, de a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt $(1 + \frac{1}{n})^n \geq 2$, tehát ha egyáltalán van limesze, akkor az mindenképpen legalább 2.

Ezután következett a határérték és egyenlőtlenségek témaköre. Kimondtam a fő tételünket, a rendőrelvet, amelyet három részre bontottam: 1. ha $a_n \leq b_n$ egy küszöbtől kezdve és $a_n \to \infty$, akkor $b_n \to \infty$; 2. ha $a_n \geq b_n$ egy küszöbtől kezdve és $a_n \to -\infty$, akkor $b_n \to -\infty$; 3. ha $\lim a_n = \lim c_n = a$ (ahol a véges vagy végtelen) és egy küszöbtől kezdődően $a_n \leq b_n \leq c_n$, akkor $\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n = a$. Példaként meghatároztuk az $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$ és $\sqrt[n]{2^n + (-1)^n}$sorozatak limeszét.

Ebben a témakörben még két állítást mondtam ki. Az egyik a limeszek közötti egyenlőtlenségből következtet a sorozatok közötti egyenlőtlenségre: ha $a_n \leq b_n$ és van határértékük, akkor $\lim a_n \leq \lim b_n$, amit indirekt igazoltunk az előzőre való visszavezetéssel. Itt megjegyeztem, hogy ha $a_n < b_n$, akkor is csak $\lim a_n \leq \lim b_n$-re következtethetünk, hiszen például $a_n = 1/(n+1)$ és $b_n = 1/n$ esetén a két sorozat limesze megegyzik. A másik állítás úgy szólt, ha $\lim a_n < \lim b_n$, akkor egy indextől kezdve $a_n < b_n$, ez a határérték definíciójának egy egyszerű következménye. Rögtön felhívtam a figyelmet, hogy fontos a szigorú egyenlőtlenség, hiszen $a_n = 1/n$, $b_n = 1/(n+1)$ esetén $\lim a_n \leq \lim b_n$, de minden n-re $a_n > b_n$.

Ezt követően a nevezetes határértékek és nagyságrendek témakörét tárgyaltuk. Először a hatványsorozatok határértékét írtam fel: az (n^k) hatványsorozat határértéke 1, ha $k = 0$; ∞, ha $k > 0$ és egész; továbbá 0, ha $k < 0$ és egész. Ezután az exponenciális sorozatokat néztük meg: $a > 1$ esetén $a^n \to \infty$, $|a| < 1$ esetén $a^n \to 0$, $a \leq -1$ esetén (a^n) oszcillálva divergens. További két sorozat, amelyek végtelenhez tartanak: $n!$ és n^n. Végül még két nevezetes sorozat: $a > 0$ esetén $\sqrt[n]{a} \to 1$, valamint $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Motivációként megkérdeztem az $n!$ és n^n sorozatok közül vajon melyik tart gyorsabban a végtelenhez. Definiáltam, hogy mit is értünk nagyságrend alatt: ha $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, akkor (a_n) gyorsabban tart végtelenhez, mint (b_n), amennyiben $b_n/a_n \to 0$ (vagy most(!) ekvivalensen $a_n/b_n \to \infty$). Bevezettem minderre a $b_n \prec a_n$ jelölést és tételként kimondtam, hogy $a > 1$, $k > 0, k \in \mathbb{Z}$ esetén $n^k \prec a^n \prec n! \prec n^n$. Mivel $n!/n^n \leq 1/n$, így $n!$-nál gyorsabban tart végtelenhez n^n.

Az eddigiek alkalmazásaként megnéztük egy meglehetősen csúnyának látszó hányados határértékét a szokásos módszerrel: a számlálóból és a nevezőből is kiemeljük a legnagyobb nagyságrendű tagot.

Következett a határérték és korlátosság témaköre. Emlékeztettem az alulról, felülről korlátos halmaz fogalmaira, és megfogalmaztam a sorozatokra vonatkozó megfelelőiket. Kimondtam, hogy ha (a_n) konvergens, akkor korlátos, ha $a_n \to \infty$, akkor (a_n) alulról korlátos, de felülről nem korlátos; ha $a_n \to -\infty$, akkor (a_n) felülről korlátos, de alulról nem. Az $a_n = (-1)^n$ sorozat példája mutatja, hogy egy korlátos soorzat nem feltétlenül konvergens.

Az óra utolsó támaköre a monotonitás és határérték kapcsolata volt. Először definiáltam, hogy egy sorozat monoton növekedése és csökkenése, valamint szigorú monotonitása mit jelent. Ezután kimondtam, hogy minden monoton sorozatnak van véges vagy végtelen határértéke, pontosabban ha (a_n) monoton növő és felülről korlátos, akkor $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\} \in \mathbb{R}$; ha (a_n) monoton növekedő és felülről nem korlátos, akkor $\lim a_n = \infty$; ha (a_n) monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor $\lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$; végül ha (a_n) monoton csökkenő és alulról nem korlátos, akkor $\lim a_n = -\infty$.

Alkalmazásként az $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ rekurzív sorozat határértékét kerestük meg. Indukcióval beláttuk, hogy monoton növő, majd igazoltuk, hogy (például) a 2 egy felső korlátja. Ekkor a tétel szerint konvergens, a rekurzióban elvégezhető a határátmenet, és a határértékre -1 vagy 2 adódik, amelyek közül a negatív kizárható, hiszen a_n nemnegatív sorozat, így a limesze is az (a limesz és egyenlőtlenségek kapcsolatáról szóló tétel alapján).