Bevezető analízis előadás

Rövid ciklusú matematikatanár szak, 2018. ősz

3. alkalom (október 19.)

Az óra elején átismételtük, hogy hol is tartunk. Megbeszéltük valós számhalmaz minimumának, maximumának, felső és alsó korlátjának fogalmát. Ezután bevezettem a felülről, alulról korlátos, valamint a korlátos halmaz elnevezéseket. Megbeszéltük, hogy ha egy halmaznak van felső korlátja, akkor végtelen sok van, és hasonlóan, ha van alsó korlát, akkor végtelen sok. A $(0,1)$ intervallum példáján észrevettük, hogy a felső korlátos között van legkisebb (az 1) és az alsó korlátos között van legnagyobb (a 0). Ez nem véletlen, erről szól a teljességi tétel: ha egy nemüres halmaz felülről korlátos, akkor a felső korlátjai között van legkisebb; ha alulról korlátos, akkor az alsó korlátjai között van legnagyobb. Bevezettük a szuprémum vagy felső határ elnevezést a legkisebb felső korlátra (jele: $\sup H$), valamint az infimum vagy alsó határ elnevezést a legnagyobb alsó korlátra (jele $\inf H$). Konkrét példaként megnéztük a $H = (0,1)$ intervallumot, amelyre $\sup H = 1$ és $\inf H = 1$ (ezeket részletesen meg is indokoltuk). A másik példánk az $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ halmaz volt, itt is mindent $(\min, \max, \sup, \inf)$ alaposan megbeszéltünk. A példák közben néhány egy igen észrevételt is tettünk: ha egy halmaznak van maxmimuma, akkor felülről korlátos, sőt a szuprémuma a maximum. Visszafele ez nem igaz, magyarán felülről korlátos halmaznak nem feltétlenül van maximuma (például $(0,1)$ intervallum).

Ezt követően rátértünk a hatványozás témakörére. Bevezettem az $a^n := a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ jelölést, ha a valós és n pozitív egész. Kimondtam a hatványozás azonosságait, és pár szót ejtettem a bizonyításról (házinak feladtam). Hogy az azonosságok érvényben maradjanak, $a \neq 0$ esetén $a^0 = 1$ (a 0-nak nem értelmezzük 0-adik hatványát), továbbá $a^{-n} = 1/a^n$. Ezután pozitív számokra értelmeztük az n-edik gyök fogalmát ($\sqrt[n]{a}$ az az egyértelműen létező pozitív valós szám, amelynek n-edik hatványa éppen a), majd definiáltam a racionális kitevőjű hatvány esetét: ha p, q egészek, amelyekre $q > 0$, akkor $a > 0$ esetén legyen $a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p$.

Mindezek után a valós kitevőjű hatvány értelmezésének ötletével folytattuk: $r < x < s$ (ahol r, s racionális számok) és $a > 1$ esetén szeretnénk, hogy $a^r < a^x < a^s$ legyen (monotonitás). Ehhez segédállításként kimondtuk, hogy ha $a > 1$ valós és $r < s$ racionális számok, akkor $a^r < a^s$. Ebből következik, hogy ha $0 < a < 1$ valós és $r < s$ racionális, akkor $a^r > a^s$. Ezzel minden készen áll a valós kitevőjű hatvány értelmezéséhez. Először a $2^{\sqrt{2}}$ példáján próbáltam érzékeltetni, hogy az imnéti monotonitási tulajdonságot szeretnénk megőrizni. Általában tekintsük a következő halmazokat adott $x \in \mathbb{R}$ és $a > 1$ esetén:

$$A := \{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\}, \qquad B := \{a^s : x < s, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Ekkor, bármi is legyen a^x, azt szeretnénk, hogy az A és B elemei közrefogják. Ennek alapján kézenfekvő, hogy $a^x := \sup A = \inf B$ (csak kimondtam, hogy valóban $\sup A = \inf B$). Ha $0 < a < 1$, akkor legyen $a^x = (1/a)^{-x}$, végül pedig $1^x = 1$. Ezzel a^x-t minden $a > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmeztük. Nem nehéz belátni, hogy az így definiált hatványfogalom rendelkezik a megszokott műveleti tulajdonságokkal, ezeket csak kimondtam. Végül még megfogalmaztam a hatványozás monotonitását: ha $x < y$, akkor $a > 1$ esetén $a^x < a^y$; továbbá azt is, hogy minden $a^x > 0$ bármely a és x esetén, amelyre értelmezve van. Az óra legvégén röviden szót ejtettem negatív számokra az n-edik gyökröl abban az esetben, amikor n páratlan.