Bevezető analízis előadás

Rövid ciklusú matematikatanár szak, 2018. ősz

2. alkalom (szeptember 28.)

Az óra első témája a valós számok felépítése volt. Beszéltünk arról, hogy mit jelent a konstruktív felépítés: megkonstruáljuk a valós számokat, például legyenek végtelen tizedestörtek, de ekkor definiálnunk kell közöttük a műveleteket és a rendezést. Mi ehelyett az axiomatikus felépítést választjuk: nem törődünk azzal, hogy mik a valós számok, csak a tulajdonságaik érdekelnek. Elvárjuk, hogy eleget tegyenek bizonyos szabályoknak (axiómák). Természetesen itt is jogosan vetődik fel, hogy van-e olyan struktúra, amely kielégíti az általunk kirótt szabályokat. Felírtam az axiómák négy „csoportját” (test, rendezési, arkhimédészi és Cantor).

A testaxiómák a valós számok algebrai tulajdonságait rögzítik. Adott két művelet, az összeadás és szorzás. Az összeadásra a következőket írjuk elő: kommutativitás, asszociativitás, nullelem létezése és ellentett elem létezése. A szorzás esetében ugyancsak megkívánjuk a kommutativitást, asszociativitást, ezenkívül a nullelemtől különböző egységelem létezését, illetve a nullelem kivételével a reciprok létezését. Az összeadást és szorzást a disztributivitás axiómája kapcsolja össze. Az olyan struktúrákat, amelyekben mindez a 9 axióma teljesül, testeknek szokás hívni.

Ezt követően a rendezési axiómákra tértünk rá. Bevezettük az $a < b$ relációt, és erre előírtuk a trichotómiát, tranzitivitást, valamint összekapcsoltuk az összeadás és szorzás műveletével ($a < b \implies a + c < b + c$, illetve $(a < b) \wedge (0 < c) \implies ac < ac$). (Meséltem arról, hogy a kő–papír–olló játék valójában egy nem tranzitív rendezés.)

Következett az arkhimédészi axióma (minden valós számnál van nagyobb pozitív egész szám), amely az előzőekből nem vezethető le (de nem könnyű példát találni, erről meséltem picit).

A Cantor-axiómában azt követeljük meg, hogy egymásba skatulyázott korlátos, zárt intervallumok metszete nem üres. Lényeges, hogy zárt intervallumokról van szó, példaként az arkhimédészi axióma segítségével beláttam, hogy a $\cap_{n=1}^{\infty}(0, 1/n) = \emptyset$. Ezzel megvan minden axióma, és a valós számok halmazára ($\mathbb{R}$) úgy tekintünk, mint egy olyan struktúra, amely teljesíti mind a 15 axiómát.

Bevezettük ezután az abszolútérték fogalmát, és a tulajdonságait is felírtam (de nem láttam be).

A rendezés segítségével bevezethetjük a pozitív, negatív szám elnevezéseket. Használhatjuk továbbá az $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ jelöléseket is. Értelmezhetjük ezenkívül a nyílt, zárt, egyik oldalról nyílt, másikról zárt intervallumokat, a nyílt, zárt félegyeneseket. Megemlítettem az elfajuló intervallumokat is.

Ezt követően rátértünk a tizedes törtekre. Megbeszéltük, hogy véges tizedes tört alatt az

$$n, a_1 a_2 \dots a_k = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

alakú véges összeget értjük, ahol $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ és $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Azt mondjuk, hogy az $x \geq 0$ szám végtelen tizedes tört alakja $n, a_1 a_2 a_3 \dots$, ha $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ és $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ (ahol $j = 1, 2, 3 \dots$), továbbá

$$\begin{gathered} n \leq x \leq n + 1, \\ n, a_1 \leq x \leq n, a_1 + \frac{1}{10}, \\ \vdots \\ n, a_1 a_2 \dots a_k \leq x \leq n, a_1 a_2 \dots a_k + \frac{1}{10^k}, \\ \vdots \end{gathered}$$

(Ez végtelen sok egyenlőtlenség! Később majd végtelen összegként is tudjuk értelmezni, de egyelőre kevés eszközünk van ahhoz.) Három kérdést fogalmaztam meg: létezik-e minden nemnegatív valós számnak végtelen tizede tört alakja? Ha igen, akkor egyértelmű-e? Adott végtelen tizedes törthöz található-e olyan x valós szám, amelynek éppen az a végtelen tizedes tört alakja? Kimondtam (de nem igazoltam), hogy a végtelen tizedes tört alak egyértelmű, kivéve ha x pozitív véges tizedes tört alakban felírható szám. Ekkor kétféle végtelen tizedes tört alakja van $(\ldots, \ldots a_k 00000\ldots$ és $\ldots, \ldots (a_k - 1)999\ldots$, tehát az egyikben egy indextől kezdve minden jegy 0, a másikban pedig csupa 9). Az is igaz, hogy minden végtelen tizedestört egyértelműen meghatároz egy valós számot, amelynek az a végtelen tizedestört alakja.

Ezt követően értelmeztük egy H valós számhalmaz legnagyobb elemének (maximumának) és legkisebb elemének (minimumának) fogalmát. Mindkettő a halmaz eleme kell hogy legyen, a maximumnál nincs nagyobb elem a halmazban, a minimumnál nincs kisebb. Bevezettük a $\max A$ és $\min A$ jelöléseket és néztünk sok példát: megbeszéltük, hogy nemüres véges halmaznak van maximuma és minimuma (ez az elemszámra vonatkozó indukcióval igazolható); voltak további példaként a $[0, 1)$ intervallum (amelynek nincs maximuma, mert bármely $x \in (0, 1)$ esetén $(x + 1)/2 > x$), valamint az $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ halmaz. Ez utóbbinak azért nincs minimuma, mert minden pozitív egész n-re $1/n > 1/(n + 1)$.

Ezután az alsó és felső korlát értelmezésével folytattuk. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak a $P \in \mathbb{R}$ szám felső korlátja, ha minden $h \in H$ esetén $h \leq P$. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak a $P \in \mathbb{R}$ szám alsó korlátja, ha minden $h \in H$ esetén $h \geq P$. Láttuk, hogy ha létezik felső korlát, akkor végtelen sok van. Példaképpen megvizsgáltuk $[0, 1)$ intervallum felső korlátjait és az $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ halmaz alsó korlátjait.