

Bevezető analízis 2., 2017. tavasz, Gyakorló feladatsor

Tudnivalók. Minden feladat 1 pontot, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható, azonban súlyos hibát tartalmazó megoldásra nulla pontot adunk, még ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban kb. 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. Az előadáson vagy gyakorlatokon bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Előadáson/Gyakorlaton bizonyítottuk, hogy...”), kivéve ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben következnek. A megoldásra 120 perc áll rendelkezésre.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem!** **Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos!** Jó munkát!

1. Egy matematikaversenyen 10 diák vett részt és 7 feladatot kellett megoldani. Jelölje $M(D, F)$ azt, hogy a D diák megoldotta az F feladatot. Írjuk fel kvantorokkal az alábbi kijelentéseket (áthúzást ne használjunk!). Mi a logikai kapcsolat a kijelentések között?

P: Nincs olyan diák, aki egy feladatot sem oldott meg.

Q: Nincs olyan feladat, amelyet senki nem oldott meg.

2. Legyen X adott alaphalmaz és A, B, C az X valamely részhalmazai. Írjuk fel az X, A, B, C halmazok, valamint a halmazműveletek segítségével az alábbi halmazokat!

a) $\{x \in X : x \text{ az } A, B, C \text{ közül legalább egyben, de legfeljebb kettőben van benne}\}$

b) $\{x \in X : x \in A \implies x \in B\}$

3. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 1$ egész számra

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}.$$

4. Az a, b pozitív számok összege 5. Mennyi az a^2b^3 kifejezés maximuma?

5. Legyen $a_n = \sqrt[n]{0,005} - 0,8$ ($n = 1, 2, \dots$). Igaz-e, hogy az (a_n) sorozatnak csak véges sok negatív tagja van?

6. Mutassuk meg, hogy minden K valós számhoz van olyan N szám, amelyre minden $n > N$ egész szám esetén teljesül $2n^3 - 5n^2 + K > 300 + n^2\sqrt{n}$.

7. Legyen $I_n = \left[-1 - \frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ($n = 1, 2, \dots$). Egymásba skatulyáztak-e az I_n intervallumok?

Határozzuk meg a $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ metszetet!