Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2017. tavasz

6. előadás (március 29.)

Az előadás elején felidéztem a múlt óráról a valós kitevőjű hatványoz bevezetésével kapcsolatosan vázolt ötletet: $r < x < s$ (ahol r, s racionális számok) és $a > 1$ esetén szeretnénk, hogy $a^r < a^{\sqrt{2}} < a^s$ teljesüljön. Ehhez segédállításként beláttuk, hogy ha $a > 1$ valós és $r < s$ racionális számok, akkor $a^r < a^s$. Ebből következik, hogy ha $0 < a < 1$ valós és $r < s$ racionális, akkor $a^r > a^s$ (ennek végiggondolását feladtam házinak). Ezzel minden készen áll a valós kitevőjű hatvány értelmezéséhez. Tekintsük a következő halmazokat adott $x \in \mathbb{R}$ és $a > 1$ esetén:

$$A := \{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\}, \qquad B := \{a^s : x < s, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Tételként kimondtam, hogy $\sup A = \inf B$. A bizonyításnak azt a részét megnéztük, hogy $\sup A \leq \inf B$. Valójában azt láttuk be, hogy ha minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén $a < b$ (itt elég lenne $a \leq b$ is), akkor szükségképpen $\sup A \leq \inf B$. Ez abból adódik, hogy minden b felső korlátja A-nak, így $\sup A \leq b$, de ekkor $\sup A$ alsó korlátja B-nek, vagyis $\sup A \leq \inf B$. A bizonyítás második felét, nevezetesen az egyenlőség igazolását kihagytam. A tétel után kézenfekvő módon adódik a^x definíciója, amely legyen $a^x := \sup A = \inf B$. Ha $0 < a < 1$, akkor legyen $a^x = (1/a)^{-x}$, végül pedig $1^x = 1$. Ezzel a^x-t minden $a > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmeztük. Nem nehéz belátni, hogy az így definiált hatványfogalom rendelkezik a megszokott műveleti tulajdonságokkal, ezeket csak kimondtam, a bizonyításba nem mentünk bele (a függvényhatárérték segítségével majd nagyon egyszerűen ki fog jönni később).

Ezt követően rátértünk a sorozatok konvergenciájának témakörére. Először szóban beszéltem a sorozat fogalmáról: egy sorozat valójában függvény, amely a pozitív egészeken van értelmezve, de a fejünkben továbbra is $a_1, a_2, \ldots$ (később a függvény fogalmánál visszautalok majd erre). Sok példát mutattam sorozatok különböző megadására: explicit megadás ($a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $a_n = (-1)^n$), rekurzív (Fibonacci; $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$; $a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}$) és egyéb definícióval adott (a_n az n-edik prímszám; a_n a $\sqrt{2}$ végtelen tizedestört alakjának n-edik tizedes jegye; kérdés, hogy ez utóbbiak vajon megadhatók-e explicit alakban?). Ezután az $a_n = 1/n$, $a_n = (-1)^n/n$ és $a_n = (-1)^n$ sorozatok kapcsán megfigyeltük a 0-hoz tartás és nemtartás jelenségét. A példák által motiválva megfogalmaztam a sorozat határértékének kétféle definícióját: az (a_n) sorozat határértéke a $b \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén $a_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ véges sok kivétellel teljesül (más szóval az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van a $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ intervallumon kívül). A másik definíció: az (a_n) sorozat határértéke $b \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |a_n - b| < \varepsilon.$$

Rögtön megjegyeztem, hogy az N küszöbszámnak nem kell egésznek lennie. Beláttuk, hogy a két definíció egymással ekvivalens. Ezt követően példákat néztünk határértékre és küszöbszámokra: $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(-1)^n/n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ (ez utóbbinál a „fáradékony bolha" tréfás elnevezést mondtam). A „küszöbmentes" definícióval megmutattuk, hogy az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak nincs határértéke, házinak feladtam, hogy a „küszöbös" definícióval is gondoljuk ezt végig. Ezután bevezettem a konvergens és divergens sorozat elnevezéseket: konvergens egy sorozat, ha van olyan b valós szám, amely határértéke; divergens, ha nem konvergens, vagyis nincs olyan b valós szám, amely határértéke lenne. Az óra végén néhány megjegyzést tettem a két definícióval kapcsolatban. Egyrészt, ha a $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ intervallumon kívül csak véges sok tagja van a sorozatnak, akkor belül végtelen sok, azonban fordítva nem igaz (pl. $(-1)^n$, $b = 1$, $\varepsilon = 1/2$). Másrészt, ha ε-hoz N jó küszöb, akkor minden N-nél nagyobb szám is jó küszöb ugyanehhez az ε-hoz. Végül, ha N jó küszöb ε-hoz, akkor minden $\varepsilon' > \varepsilon$ számhoz is jó küszöb.