Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2015. tavasz

5. előadás (március 22.)

Az előadás első fő témája a korlátos halmazok. Értelmeztük egy H valós számhalmaz legnagyobb elemének (maximumának) és legkosebb elemének (minimumának) fogalmát. Mindkettő a halmaz eleme kell hogy legyen, a maximumnál nincs nagyobb elem a halmazban, a minimumnál nincs kisebb. Bevezettük a $\max A$ és $\min A$ jelöléseket és néztünk sok példát: megbeszéltük, hogy nemüres véges halmaznak van maximuma és minimuma (ez az elemszámra vonatkozó indukcióval igazolható); voltak további példaként az $[a, b]$ és (a, b) intervallumok (előbbinek van maximuma és minimuma is, utóbbinak egyik sincs, mert bármely $x \in (a, b)$ esetén $(x+b)/2 > x$ és $(a+x)/2 < x$), valamint az $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ halmaz. Ez utóbbinak azért nincs minimuma, mert minden pozitív egész n-re $1/n > 1/(n + 1)$.

Ezután az alsó és felső korlát értelmezésével folytattuk. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak a $P \in \mathbb{R}$ szám felső korlátja, ha minden $h \in H$ esetén $h \leq P$. Egy halmazt felülről korlátosnak mondunk, ha van felső korlátja. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak a $P \in \mathbb{R}$ szám alsó korlátja, ha minden $h \in H$ esetén $h \geq P$. Egy halmazt alulról korlátosnak mondunk, ha van alsó korlátja. Ezután ismét példákat néztünk. Láttuk, hogy az $[a, b]$ és (a, b) intervallumoknak b egy felső korlátja, és minden, b-nél nagyobb szám is felső korlát. Hasonlóan, az $[a, b]$ és (a, b) halmazoknak a egy alsó korlátja, és minden, a-nál kisebb szám is az. Ezenkívül megnéztük az $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ halmazt, amelynek az 1 felső korlátja, és a 0 alsó korlátja. Megjegyeztem, hogy ha van legnagyobb elem, akkor az persze felső korlát is egyben (hasonlóan: minimum mindig alsó korlát), de ez visszafele nem igaz: az (a, b) intervallumnak van felső korlátja, de nincs maximuma. Végül láttuk azt is, hogy a valós számok halmaza felülről nem korlátos, hiszen bármely P valós számnál van nagyobb pozitív egész (ami egyben valós).

Ezután kimondtam – a példák által valamennyire illusztrált – teljességi tételt, amely szerint minden nemüres felülről korlátos H számhalmaznak van legkisebb felső korlátja. Intervallumfelezéssel bizonyítottunk, legyártottuk az $[a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott intervallumsorozatot a következő tulajdonságokkal: a_n nem felső korlátja A-nak, b_n felső korlátja A-nak, továbbá $b_n - a_n = (b_{n-1} - a_{n-1})/2$. A Cantor-axióma garantál egy elemet az intervallumok metszetében, és az arkhimédészi axióma alapján nem nehéz meggondolni, hogy a metszet szükségképpen egyelemű. Végül indirekt módon beláttuk, hogy x felső korlát, továbbá x-nél nincs kisebb felső korlát (az ellentmondás mindkét esetben az lett, hogy találtunk a metszetben egy másik elemet is).

A teljességi tételnek az alsó korlátra vonatkozó párja úgy szól, hogy minden nemüres alulról korlátos halmaznak van legnagyobb alsó korlátja (ezt nem igazoltam, de érdemes végiggondolni, ezzel ellenőrizhető, hogy értjük-e a bizonyítást).

A teljességi tételek alapján definiáltuk H nemüres felülről korlátos halmaz szuprémumát (felső határát), amelyet $\sup H$-val jelölünk. Hasonló módon, ha H nemüres alulról korlátos halmaz, akkor a legnagyobb alsó korlátját a halmaz infimumának nevezzük és $\inf H$-val jelöljük. Példaképpen megbeszéltük (vázlatosan le is írtam), hogy $\sup(a, b) = b$, $\inf(a, b) = a$, $\sup\{1, 1/2, 1/3, \dots\} = 1$, $\inf\{1, 1/2, 1/3, \dots\} = 0$.

Ezt követően értelmeztem felülről nem korlátos halmazok szuprémumát, legyen $\sup H = \infty$, illetve alulról nem korlátos halmazok infimumát, legyen $\inf A = -\infty$ (ezek csupán jelölések, $\pm\infty$ nem valós számok). Végül az üreshalmazt néztük meg, amelynek minden valós szám felső és alsó korlátja is egyben. Ekkor egyetlen logikus definíció (megállapodás) az lehet, hogy $\sup \emptyset = -\infty$ és $\inf \emptyset = \infty$.

Ezt követően rátértünk a hatványozás témakörére. Bevezettem az $a^n := a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ jelölést, ha a valós és n pozitív egész. Kimondtam a hatványozás azonosságait, és pár szót ejtettem a bizonyításról (házinak feladtam). Hogy az azonosságok érvényben maradjanak, $a \neq 0$ esetén $a^0 = 1$ (a 0-nak nem értelmezzük 0-adik hatványát), továbbá $a^{-n} = 1/a^n$. Ezután emlékeztettem az n-edik gyök fogalmára, majd definiáltam a racionális kitevőjű hatvány esetét: ha p, q egészek, amelyekre $q > 0$ és $(p, q) = 1$, akkor $a > 0$ esetén legyen $a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p$. Beláttuk, hogy ha $p/q = m/n$, akkor $(\sqrt[q]{a})^p = (\sqrt[r]{s})^s$, így értelmes a definíció. Az előadás végén még elmondtam a valós kitevőjű hatvány értelmezésének ötletét: $r < x < s$ (ahol r, s racionális számok) és $a > 1$ esetén szeretnénk, hogy $a^r < a^{\sqrt{2}} < a^s$).