Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2017. tavasz

4. előadás (március 8.)

Az előadás elején elismételtem a valós számok eddig bevezetett axiómáit: test, rendezési és arkhimédészi. Ezeket mind teljesíti a racionális számok teste is, így szükség van még axiómára, hogy a valós számokat kapjuk. Ez lesz a Cantor-axióma (más felépítésben lehetne ettől eltérő is). Az axióma kimondása előtt bevezettem az egymásba skatulyázott intervallumok sorozatának fogalmát: $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, ahol végtelen sok intervallumról van szó, és a tartalmazások iránya is fontos! A Cantor-axiómában azt követeljük meg, hogy egymásba skatulyázott zárt intervallumok metszete nem üres. Lényeges, hogy zárt intervallumokról van szó, példaként az arkhimédészi axióma segítségével beláttam, hogy a $\cap_{n=1}^{\infty}(0, 1/n) = \emptyset$. Ezzel megvan minden axióma, és a valós számok halmazára ($\mathbb{R}$) úgy tekintünk, mint egy olyan struktúra, amely teljesíti mind a 15 axiómát.

Rátértünk ezután a négyzetgyök és n-edik gyök témakörére. Kérdés: van-e minden pozitív valós számnak négyzetgyöke (vagyis olyan valós szám, amelynek négyzete az adott szám), és ha igen, akkor egyértelmű-e? A létezés előtt segédállításként igazoltam, hogy ha $0 < b_1 < b_2$, akkor $b_1^2 < b_2^2$. Majd tételként kimondtam, hogy minden $a > 0$ számhoz található olyan $b > 0$ szám, amelyre $b^2 = a$. A bizonyítás fő gondolata az intervallumfelezési eljárás („oroszlánfogás”). Konstruáltunk olyan $I_n = [a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumokat (speciálisan $a_1 = 0, b_1 = a + 1$, amelyekre $a_n^2 \leq a \leq b_n^2$, továbbá $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$. Ekkor a Cantor-axióma miatt a metszetük nem üres, legyen egy eleme x. Nem nehéz megmutatni (becsléssel), hogy $|x^2 - a| \leq c/n$, ami (az arkhimédészi aximóma miatt) csak úgy lehetséges, hogy $x^2 = a$. A létezés után az egyértelműség jött, de ez nyilvánvalóan következik a segédállításból. Szokásos jelölés: $b = \sqrt{a}$. Hasonlóan igazolható (de nem láttam be), hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $a > 0$ számokhoz egyértelműen létezik $b > 0$ szám, amelyre $b^n = a$. Jelölése $\sqrt[n]{a}$.

Ezt követően rátértünk a tizedes törtekre. Megbeszéltük, hogy véges tizedes tört alatt az

$$n, a_1 a_2 \dots a_k = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k}{10^k}$$

alakú véges összeget értjük, ahol $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ és $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Azt mondjuk, hogy az $x \geq 0$ szám végtelen tizedes tört alakja $n, a_1 a_2 a_3 \dots$, ha $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ és $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ (ahol $j = 1, 2, 3 \dots$), továbbá

$$\begin{gathered}
n \leq x \leq n + 1, \\
n, a_1 \leq x \leq n, a_1 + \frac{1}{10}, \\
\vdots \\
n, a_1 a_2 \dots a_k \leq x \leq n, a_1 a_2 \dots a_k + \frac{1}{10^k}, \\
\vdots
\end{gathered}$$

(Ez végtelen sok egyenlőtlenség! Később majd végtelen összegként is tudjuk értelmezni, de egyelőre kevés eszközünk van ahhoz.) Három kérdést fogalmaztam meg: létezik-e minden nemnegatív valós számnak végtelen tizede tört alakja? Ha igen, akkor egyértelmű-e? Adott végtelen tizedes törthöz található-e olyan x valós szám, amelynek éppen az a végtelen tizedes tört alakja? Konstruktív módon bebizonyítottuk, hogy minden $x \geq 0$ számnak van végtelen tizedestört alakja (sőt olyat gyártottunk, hogy a fenti egyenlőtlenségekben a jobb oldalon szigorú egyenlőtlenség teljesül). Kimondtam (de nem igazoltam), hogy a végtelen tizedes tört alak egyértelmű, kivéve ha x pozitív véges tizedes tört alakban felírható szám. Ekkor kétféle végtelen tizedes tört alakja van ($\dots, \dots a_k 00000 \dots$ és $\dots, \dots (a_k - 1)999 \dots$, tehát az egyikben egy indextől kezdve minden jegy 0, a másikban pedig csupa 9). Az előadás végén pedig a Cantor-axióma segítségével megmutattuk, hogy minden végtelen tizedestört egyértelműen meghatároz egy valós számot, amelynek az a végtelen tizedestört alakja. A bizonyítás azon múlt, hogy a végtelen sok egyenlőtlenséget zárt intervallumok metszetére lehet átfogalmazni, amely a Cantor-axióma miatt nem üres, és egyelemű az arkhimédészi aximóma következményeként.