# Bevezető analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2017. tavasz

**12. előadás (május 17.)**

A mai előadás témája a konvex és konkáv függvények voltak. Mindent csak a konvex esetben mondtunk ki, mert ebből a konkáv függvényekre vonatkozó eredmények könnyen adódnak a konkávitás definíciójának segítségével. A grafikus motiváció után konvexnek neveztünk egy függvényt egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha az intervallum bármely $a < b$ pontjai esetén esetén minden $a < x < b$ közbülső pontra $f(x) \le h_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$. (Szemléletesen „a grafikon a húr alatt fekszik az $(a, b)$ intervallumon".) Egy függvényt konkávnak hívunk, ha $(-f)$ konvex, vagyis az előző definícióban az $f(x) \ge h_{a,b}(x)$ módosítást kell végrehajtani. Szigorúan konvex, illetve szigorúan konkáv egy függvény, ha az iménti egyenlőtlenségekben szigorú egyenlőtlenség érvényes. Itt megjegyeztem, hogy $h_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b)$ is helyes képlet, annak ellenére, hogy ránézésre nem ugyanaz. Másrészt felhívtam a figyelmet, hogy nem csupán a két a grafikon végpontját összekötő húrt kell tekinteni, hanem az összeset! Ennek kapcsán még egy ellenpéldát is felrajzoltam, egy konvex függvényt „elrontottunk egy huplival".

Ezután példaképpen definíció szerint ellenőriztük (ami szemléletesen világos), hogy az $1/x$ függvény konvex $\mathbb{R}^+$-on. Házinak adtam fel, hogy nézzük meg $\mathbb{R}^-$- on a konkávitást, valamint lássuk be, hogy az $x^2$ függvény konvex $\mathbb{R}$-en.

Egy kis grafikus motiváció után kimondtuk a Jensen-egyenlőtlenséget. Az $f$ pontosan akkor konvex az $I$ intervallumon, ha bármely $a, b \in I$ és $0 < t < 1$ esetén

$$f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b).$$

A $ta + (1-t)b$ kifejezést az $a, b$ pontok konvex kombinációjaként szokás emlegetni. A Jensen-egyenlőtlenség bizonyítása a konvexitás definícióján múlik, egyszerűen az $x = ta + (1-t)b$ pontra kell alkalmazni (ennek kapcsán beláttuk, hogy $x$ éppen az $(1-t) : t$ arányú osztópontja az $[a, b]$ intervallummnak). Mindezek után kimondtam az általános Jensen-egyenlőtlenséget: ha $a_1, \dots a_n \in I$ és $0 < t_1, \dots, t_n < 1$, $t_1 + \dots + t_n = 1$ (ezeket szokás súlyoknak hívni), akkor

$$f(t_1a_1 + \dots + t_na_n) \le t_1f(a_1) + \dots + t_nf(a_n),$$

és ez visszafele is igaz. Az indukciós bizonyításnak az egyszerűség kedvéért csak azt a speciális esetét néztük meg, amikor az $n = 2$-ről $n = 3$-ra való áttérés van (az általános eset hasonló, csak többet kell írni és könnyebb belekavarodni).

A Jensen-egyenlőtlenségnek az $1/x$ függvényre való alkalmazásaként megkaptuk a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget, valamint az $x^2$ függvényre való alkalmazásaként a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget.

Az óra maradék részében a konvexitás egy ekvivalens átfogalmazását tárgyaltuk. Az $f$ pontosan akkor konvex az $I$ intervallumon, ha minden $a \in I$ esetén az $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ meredekségfüggvény monoton növő az $I \setminus \{a\}$ halmazon. A bizonyításnak csak azt az irányát mondtam el, hogy a meredekségfüggvény monotonitásából következik a konvexitás. A másik irányt kihagytam (de valójában az ottani három esete egyike éppen a másik irány visszafele olvasása). Végül alkalmazásképpen igazoltuk, hogy az $x^n$ függvény konvex $\mathbb{R}^+$-on minden $n$ pozitív egész esetén.