Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2017. ősz

9. előadás (november 20.)

Az előadás témája a totális differenciálhatóság volt. Felidéztem az egyváltozós differenciálhatóság (egyik) ekvivalens definícióját, és picit alakítottunk rajta, hogy átvihető legyen több változóra:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - \alpha(x-a)|}{|x-a|} = 0.$$

Arról van szó, hogy az a pont körül az $f(x)$ „jól közelíthető" az $y = f(a) + \alpha(x-a)$ lineáris függvénnyel – ez éppen az $(a, f(a))$ ponton átmenő érintő egyenesének egyenlete – abban az értelemben, hogy a maradéktag még a 0-hoz tartó $|x-a|$ kifejezéssel leosztva is 0-hoz tart. Megbeszéltük, hogy két változóban érintő egyenes helyett érintő síkot veszünk (bármi is az egyelőre). Mivel az $(a, b, f(a,b))$ ponton átmenő síkok $z = f(a,b) + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(y-b)$ egyenlettel írhatók le, ezért máris kézenfekvő a következő definíció. Legyen $f \colon H \to \mathbb{R}$ (ahol $H \subset \mathbb{R}^2$) és $a \in \operatorname{int} H$; ekkor f totálisan differenciálható az (a,b) pontban, ha

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \lim_{x \to a} \frac{|f(x,y) - f(a,b) - \alpha_1(x-a) - \alpha_2(y-b)|}{|(x,y) - (a,b)|} = 0.$$

Megjegyeztük, hogy az iménti hányados számlálójában az abszolútérték elhagyható (de később vektorértékű függvény esetében nem), viszont a nevezőbeli abszolútérték lényeges (mert vektorokkal nem oszthatunk).

Beláttuk, hogy ha f totálisan differenciálható (a,b)-ben, akkor ott léteznek a parciális deriváltjai, és a definícióban szereplő α_1, α_2 számokra $\alpha_1 = \partial_1 f(a,b)$ és $\alpha_2 = \partial_2 f(a,b)$ teljesül. Rögtön mutattunk egy példát, hogy ez visszafelé nem igaz: ha $f = 0$ a tengelyeken és $f = 1$ másutt, akkor az origóban léteznek a parciális deriváltak, de ott f nem differenciálható (ezt definíció alapján, az átviteli elv segítségével igazoltuk).

Differenciálható f esetén bevezettük a derivált(vektor), más szóval gradines(vektor) fogalmát, amely az $f'(a,b) = (\partial_1 f(a,b), \partial_2 f(a,b))$ sorvektor.

Kicsit meséltem arról, hogy a differenciálhatóság valójában linearizálás, és a gradienst voltaképpen egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés mátrixának tekinthetjük. Ez a lineáris leképezés „jól közelíti" a függvényt az $(a, b, f(a,b))$ pont körül. Általában ez lesz majd egy $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény deriváltja egy adott pontban: az az $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés, amely „jól közelíti" a szóban forgó függvényt az adott pont körül.

Megmutattuk, hogy a differenciálhatóságból következik az adott pontbeli folytonosság, és ezt az előző példán alkalmaztuk is, ezzel egy másik bizonyítást adva az origóbeli nem differenciálhatóságra.

További példaként megnéztük az $f(x,y) = xy$ függvény differenciálhatóságát a $(2,3)$ pontban. Láttuk azt is, hogy ha az origón kívül $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ és az origóban $f = 0$, akkor a függvénynek léteznek a parciális deriváltjai az origóban, de ott nem differenciálható, mert nem folytonos. Megmutattuk, hogy ha az origón kívül $f(x,y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$ és az origóban $f = 0$, akkor léteznek a parciális deriváltak az origóban, ott f folytonos is, ám mégsem differenciálható az origóban.

Ezután kimondtuk a differenciálhatóság egy elégséges feltételét, nevezetesen, hogy az adott pont egy környezetében léteznek a parciális deriváltak és a parciálisderivált-függvények folytonosak az adott pontban. A bizonyítást kihagytuk, ehelyett felírtuk az előbbiekben kapott következtetési láncot:

$\exists \partial_1 f, \partial_2 f$ az adott pont egy környezetében
és a parciálisderivált-függvények folytonosak az adott pontban

$\Downarrow$

f differenciálható az adott pontban

$\Downarrow$

$\exists \partial_1, \partial_f$ az adott pontban és f folytonos az adott pontban.

Megbeszéltük, hogy egyik következtetés sem fordítható meg, ennek érdekében felidéztem az egyváltozós analízisből tanult $x^2 \sin \frac{1}{x}$ függvényt (az $x = 0$-ba 0-ként kiterjesztve), amely mindenütt deriválható, de a deriváltfüggvény nem folytonos az 0 pontban (ezt gyakorlaton megnézzük). Ebből könnyen gyárthatunk olyan kétváltozós függvényt, amelynek differenciálható az origóban, a parciális deriváltjai mindenütt léteznek, de az egyik parciálisderivált-függvény nem folytonos az origóban (gyakorlaton részletezzük).

Az elégséges feltétel következménye, hogy a kétváltozós polinomok mindenütt differenciálhatóak, a kétváltozós racionális törtfüggvények differenciálhatók az értelmezési tartományukon (ahol a nevező nem 0).

Az előadás végén a derivált és műveletek témakörbe kezdtünk bele, az a differenciálhatóság és algebrai műveletek kapcsolatáról szóló tételt kimondtam, de a bizonyításra már nem jutott idő.