Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2017. ősz

8. előadás (november 13.)

Az előadás elején folytattuk a múltkor megkezdett feladatot: adott körbe írható háromszögek közül melyiknek a területe a legnagyobb? Annyi volt hátra, hogy igazoljuk a maximális területű háromszög létét. Ehhez a feladatot az analízis nyelvére fordítottuk: helyezzük el a kört a koordináta-rendszerben úgy, hogy a középpontja az origó, sugara R legyen. A háromszöget a három csúcsa egyértelműen meghatározza, ezek (x, y), (u, v), (w, z). Mivel a körvonalon helyezkedik el a három csúcs, ezért $x^2+y^2 = u^2+v^2 = w^2 + z^2 = R^2$. Tekintsük tehát a $H := \{(x, y, u, v, w, z) \in \mathbb{R}^6 : x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = w^2 + z^2 = R^2\}$ halmazt, amelyen legyen az f függvény a háromszög területe. Beláttuk, hogy H nemüres, korlátos (ezek nagyon egyszerűek) és zárt (utóbbinál a zártságnak a sorozatokkal történő ekvivalens megfogalmazását használtuk). Ezenfelül f folytonos, amelyre a Héron-képletből következtettünk, támaszkodva a folytonosság és algebrai műveletek és kompozíció kapcsolatára vonatkozó tételekre. Mindezekből a Weierstrass-tétel már adja, hogy f-nek van maximuma és minimuma, amely a legnagyobb és legkisebb területű háromszög létezését biztosítja. Ezután elegendő belátni – ezt meg is tettük előzetesen –, hogy ha a körbe írt háromszög nem szabályos, akkor konstruálható, ugyanabba a körbe írt nagyobb területű háromszög. A feladat lezárásaként még picit beszéltem a háromszög területének determinánsos alakjáról is, valamint feltettem azt a kérdést, hogy elemi úton (Weierstrass-tétel nélkül) hogyan lenne befejezhető a bizonyítás.

Mindezek után új témába kezdtünk bele: differenciálszámítás $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre. Először a parciális deriváltat értelmeztük. Ezt motiválandó rögtön egy szélsőérték-feladattal kezdtem: keressük meg az $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ függvény szélsőértékeit az origó középpontú egység sugarú zárt körlapon. Mivel nemüres, korlátos, zárt halmazról van szó, és az f függvény kétváltozós polinom lévén folytonos, ezért a szélsőértékek léteznek. Láttuk, hogy ezek csakis belső pontban vétetnek fel (a határon $f = 0$, de belül felvesz pozitív és negatív értéket is), tehát a globális (más szóval abszolút) szélsőértékhely egyben lokális is. Ennek következtében, ha egy (a, b) pontban f-nek szélsőértéke van, akkor az $x \mapsto f(x, b)$ függvénynek lokális szélsértékhelye van a-ban, az $y \mapsto f(a, y)$ függvénynek pedig lokális szélsértékhelye van b-ben. Lokális szélsőértékhelyen a derivált 0, így az előbbi egyváltozós függvények megfelelő pontbeli deriváltja 0. Ebből két egyenletet kapunk az a, b ismeretlenekre, amelyeket megoldva megkapjuk a szélsőértékhely-jelölteket. Ezek közül a maximumhely az, ahol f értéke a legnagyobb (behelyettesítünk), minimumhelye pedig, ahol f értéke a legkisebb. Az egyenletrendszer megoldását és a szélsőértékek megkeresését házinak adtam.

Ezután megjegyeztem, hogy $f\colon H \to \mathbb{R}$ (ahol $H \subset \mathbb{R}^2$) esetén az imént bevezetett $x \mapsto f(x, b)$ (ahol $(x, b) \in H$) és $x \mapsto f(a, y)$ (ahol $(a, y) \in H$) függvényeket szokás szekciófüggvényeknek is hívni.

Minden készen állt a parciális derivált fogalmához. Legyen $f\colon H \to \mathbb{R}$ (ahol $H \subset \mathbb{R}^2$) és $(a, b) \in \operatorname{int} H$, ekkor az f-nek létezik az (a, b) pontban az első változós szerint parciális deriváltja, ha

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \in \mathbb{R},$$

más szóval az $x \mapsto f(x, b)$ szekciófüggvény deriválható a-ban. Ekkor az iménti határérték az első változó szerinti parciális derivált, amelyre én a $\partial_1 f(a, b)$ jelölést fogom használni (de temérdek jelölés van használatban). A második változó szerinti parciális deriváltat hasonlóan értelmeztük, jele $\partial_2 f(a, b)$.

Rögtön példákat néztünk: ha $f = 0$ a tengelyeken és 1 másutt, akkor $\partial_1 f(0, 0) = \partial_2 f(0, 0) = 0$; ha $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ az origó kivételével, ahol $f = 0$, akkor ugyancsak $\partial_1 f(0, 0) = \partial_2 f(0, 0) = 0$. Megjegyeztük, hogy az első példa mutatja, hogy a parciális deriváltak létezése nem elegendő az adott pontbeli folytonossághoz.

Végül p változós esetben a parciális derivált fogalmát az $x_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_p)$ szekciófüggvény a_j pontbeli deriváltjaként értelmeztem (feltétel, hogy $a \in \operatorname{int} D(f)$ legyen).

Az óra legvégén elkezdtem motiválni a totális derivált fogalmát, ezért felidéztem az egyváltozós differenciálhatóság ekvivalens megfogalmazását:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha \in \mathbb{R} \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \alpha(x - a)}{x - a} = 0.$$