Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2017. ősz

7. előadás (november 6.)

Az előadás elején felidéztem a múlt óráról a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elvet. Ezután ennek alkalmazásképpen a függvényhatárérték és algebrai műveletek kapcsolatáról szóló tételt mondtam ki, és az összegre vonatkozó részét igazoltuk is. A tétel arról szólt, hogy függvények összegének, szorzatának és hányadosának mi a határértéke, ha külön-külön léteznek a limeszek és végesek (az, amit várunk: a határértékek összege, szorzata, hányadosa, feltéve, hogy az utóbbi esetben a nevező nem nulla). Az átviteli elv segítségével mindez a sorozathatárérték és algebrai műveletek kapcsolatára vezethető vissza, amelyet viszont már tanultunk korábban.

Mindezek után a folytonosságra tértünk át. Emlékeztetőül megfogalmaztam az egyváltozós folytonosság definícióját, és rögtön jeleztem, hogy mostantól nem követeljük meg a függvénynek az adott pont egész környezetében való értelmezhetőségét (korábban csak ebben az esetben beszéltünk a pontbeli folytonosságról). Ezentúl egy $f\colon H \to \mathbb{R}$ függvény esetén bármilyen $a \in H$ pontban értelmezhetjük a folytonosság fogalmát, mégpedig f folytonos a-ban, ha

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x\, (x \in B(a,\delta) \cap H \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Rögtön megemlítettem, hogy ez majdnem karakterről karakterre ugyanaz, mint egy változóban, csupán annyi változás van, hogy mivel a függvény nem feltétlenül van egy egész környezetben értelmezve, ezért kell a $B(a,\delta)$ gömböt elmetszeni az értelmezési tartománnyal. Egy másik megjegyzésem az volt, hogy az $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ egyenlőtlenség is felírható gömbbel: $f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$, ahol itt egydimenziós gömbről van szó.

Ezután két észrevételt tettünk. Ha a torlódási pontja H-nak, akkor a definíció alapján világos, hogy f pontosan akkor folytonos a-ban, ha ott a határértéke $f(a)$. Másrészt azt a meglepő tényt is beláttuk, hogy izolált pontban minden függvény folytonos, speciálisan például az egész számokon értelmezett függvények mindenütt folytonosak.

Példaként beláttuk, hogy az $f(x_1,\ldots,x_p) = x_j$ koordináta-függvények folytonosak mindenütt $\mathbb{R}^p$-ben. Egy további példa volt az $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ függvény az origóba 0-ként kiterjesztve (megbeszéltük, hogy ezt az értéket hogyan lehet megtippelni). Ez utóbbi esetben egy pofon egyszerű becslésen múlt az origóbeli folytonosság.

Következett a folytonosságra vonatkozó átviteli elv, bizonyítás nélkül (de megjegyeztem, hogy valójában a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elvből és a két észrevételből már következik): ha $f\colon H \to \mathbb{R}$ és $a \in H$, akkor f pontosan akkor folytonos a-ban, ha

$$\forall (x_n)\, ((x_n) \subset H \text{ és } x_n \to a \implies f(x_n) \to f(a)).$$

Alkalmazásként a folytonosság és algebrai műveletek kapcsolatáról szóló tételt mondtam ki, a bizonyítás meggondolását házinak adtam. Ezután a folytonosság és kompozíció kapcsolatára vonatkozó tételt is felírtam, bizonyítás nélkül, de ez is egyszerűen meggondolható.

Következménye mindezeknek, hogy a p változós polinomok mindenütt folytonosak $\mathbb{R}^p$-ben, továbbá a racionális törtfüggvények az egész értelmezési tartományukon (ahol a nevező nem 0) folytonosak.

Rátértünk a szélsőérték-feladatokra. Fő tételünk a Weierstrass-tétel, amely azt mondja, hogy nemüres, korlátos, zárt halmazon folytonos függvénynek van maximuma és minimuma. A bizonyítást két lépésben végeztük el: először indirekt módon beláttuk, hogy a függvény szükségképpen felülről korlátos, és aztán ebből kihoztuk, hogy a legkisebb felső korlát valójában fel is vétetik (a minimum esete hasonló). A bizonyításban használtuk a korlátos, zárt halmazokra vonatkozó korábbi tételünket, az átviteli elvet, és a rendőrelvet is.

Alkalmazásképpen azt a feladatot néztük meg, hogy adott körbe írható háromszögek közül melyiknek a területe a legnagyobb. Egy hiányos bizonyítást mondtam el: ha a háromszög nem szabályos, akkor könnyen gyárthatunk nagyobb területűt az egyik csúcs (méghozzá, ahova két nem azonos hosszúságú oldal fut be) elmozdításával. Ez az érvelés azért nem teljes, mert be kell látni, hogy valóban van maximális területű háromszög (egy hasonló hibás okoskodás, hogy az 1 a legnagyobb pozitív egész, mert bármely $x > 1$ számnál van nagyobb, például $x^2 > x$). Erre már nem jutott idő, a következő órán folytatjuk.