Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2017. ősz

6. előadás (október 16.)

Az előadás elején még a ponthalmazelméletet folytattuk. Két fontos eredmény maradt hátra. Az első a zárt halmazok jellemzése: $H \subset \mathbb{R}^p$ pontosan akkor zárt, ha bármely, H-ban haladó konvergens sorozatnak a határértéke is H-ban van. Csak azt igazoltuk, hogy a zárt halmazok rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal: az érvelés indirekt volt, és használta a nyíltság, valamint a konvergencia definícióját. A másik eredmény a korlátos, zárt halmazok jellemzése: $H \subset \mathbb{R}^p$ pontosan akkor korlátos és zárt, ha bármely, H-ban haladó sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke H-ban van. Ismét csak azt láttam, hogy a korlátos, zárt halmazoknak megvan az említett tulajdonsága. A bizonyítás a Bolzano–Weierstrass-tételt és a zártság előbbi jellemzését használta.

Ezzel be is fejeztük a ponthalmazelméletet. Kis mesével zártam a témakört, beszéltem a lehetséges általánosításokról. A megszokott távolságfogalom helyett bevezethetünk más távolságokat, példaképpen a „Manhattan-távolságot” említettem (vagy a sakktáblán a „bástyatávolságot”). Ezzel is definiálható konvergencia, gömbök, nyílt, zárt halmazok. Mindez a metrikus terek témakörébe tartozik.

Ezután rátértünk a többváltozós függvényekre. Ezentúl olyan f függvényekkel foglalkozunk, amelyekre $D(f) \subset \mathbb{R}^p$ (ahol $p \geq 2$ egész szám), és $R(f) \subset \mathbb{R}$ (tehát f valós értékű). Megbeszéltük, hogy egy ilyen típusú függvény grafikonja egy $\mathbb{R}^{p+1}$-beli halmaz $\operatorname{graph} f := \{(x_1, \ldots, x_{p+1}) : x_{p+1} = f(x_1, \ldots, x_p)\}$. Ha $p = 2$, akkor ez egy felület a háromdimenziós térben. Rögtön néztünk is példákat: $f(x, y) = c$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f(x, y) = x^2$. Az ábrázoláshoz hasznosak a szintvonalak, vagyis az $\{(x, y) : f(x, y) = c\}$ halmazok, de ezek mellett még a függőleges síkmetszetek is gyakran segíthetnek. Az előbbi három függvény grafikonja rendre: vízszintes sík, kúpfelület, „vályú”.

A rajzolgatás után belekezdtünk az $\mathbb{R}^p$-beli függvényhatárérték témájába. Felidéztem az egyváltozós függvényhatárérték definícióját: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ (ahol α ötféle és β háromféle lehet), ha f értelmezve van az α egy pontozott környezetében, és β bármely V környezetéhez van olyan $\dot{U}$ pontozott környezete α-nak, hogy $x \in \dot{U}$ esetén $f(x) \in V$.

Most annyi a változás, hogy az értelmezési tartomány torlódási pontjaiban nézünk határértéket. A definíció előtt ezért bevezettem $a \in \mathbb{R}^p$ pontozott környezeteit, amelyek a $\dot{B}(a, \delta)$ kipontozott gömbök (ahol $\delta > 0$). Végül még emlékeztettem a $+\infty$ és $-\infty$ környezeteire is.

Legyen $f \colon H \to \mathbb{R}$ függvény (ahol $H \subset \mathbb{R}^p$), továbbá $a \in H'$. Ekkor $\lim_{x \to a} f(x) = \beta$ (ahol β lehet valós, $+\infty$ vagy $-\infty$), ha β bármely V környezetéhez van olyan $\dot{U}$ pontozott környezete α-nak, hogy $x \in \dot{U} \cap H$ esetén $f(x) \in V$. Feladtam házinak, hogy fogalmazzuk meg a definíciót a három esetben a környezet szó használata nélkül.

Rögtön néztünk egy példát, definíció szerint igazoltuk, hogy $\lim_{(x,y) \to (2,3)} x/y = 2/3$.

A példát követően megfogalmaztuk a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elvet. Legyen $f \colon H \to \mathbb{R}$ függvény (ahol $H \subset \mathbb{R}^p$), továbbá $a \in H'$. Ekkor $\lim_{x \to a} f(x) = \beta$ (ahol β lehet valós, $+\infty$ vagy $-\infty$) pontosan akkor, ha bármely (x_n) sorozatra teljesül, hogy ha $x_n \to a$ és $(x_n) \subset H \setminus \{a\}$, akkor $f(x_n) \to \beta$. Bizonyítás helyett két alkalmazást néztünk. Az első a fenti limesz igazolása, amelyet így számsorozatok hányadosának határértékére vezettünk vissza. A másik példában megmutattuk, hogy az x/y függvénynek nincs határértéke az origóban, mert $f(0, 1/n) = 0 \to 0$ és $f(1/n, 1/n) = 1 \to 1$.