Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2017. ősz

5. előadás (október 9.)

Az előadás első részében az $\mathbb{R}^p$-beli határérték témakörét folytattuk, és befejeztük. Emlékeztettem a konvergencia definíciójára, és arra a fontos tételre, hogy mindez ekvivalens a koordináta-sorozatok konvergenciájával.

Kimondtam állításként a határérték és műveletek kapcsolatát: ha $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor $a_n + b_n \to a + b$, $ca_n \to ca$ (ahol c tetszőleges valós szám) és $\langle a_n, b_n \rangle \to \langle a, b \rangle$. A bizonyítást gyakorlatra hagytam, egyébként a koordináta-sorozatokra kell visszavezetni.

Ezután beláttuk a Bolzano–Weierstrass-tételt $\mathbb{R}^2$-ben: korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Végül a Cauchy-kritériumot mondtam ki, vázoltam a bizonyítás lényegét (a koordináta-sorozatok mind Cauchy-sorozatok).

Ezzel befejeztük ezt a témát, és egy másikat kezdtünk, a ponthalmazelméletet. Célunk, hogy az $\mathbb{R}^p$-beli halmazok pontjait osztályozzuk a különféle tulajdonságaik alapján. Egy kis rajzolgatás után egyből megfogalmaztam néhány definíciót.

Mindenekelőtt egy x pont környezeteit értelmeztük, ezek a $B(x, r)$ nyílt gömbök, ahol $r > 0$. Majd következett egy $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz belső, külső és határpontjainak fogalma: x belső pont, ha egy egész környezete része H-nak (formálisan $\exists r > 0 : B(x, r) \subset H$); x külső pont, ha egy egész környezete része H komplementerének (formálisan $\exists r > 0 : B(x, r) \subset (\mathbb{R}^p \setminus H)$); x határpont, ha bármely környezetében van H-beli és nem H-beli (formálisan $\forall r > 0 : B(x, r) \cap H \neq \emptyset$ és $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^p \setminus H) \neq \emptyset$). A belső, külső és határpontok halmaza rendre a H belseje, külseje és határa ($\operatorname{int} H, \operatorname{ext} H, \partial H$). Megjegyeztük, hogy belső pont mindenképpen eleme H-nak, külső pedig nem eleme, de mindez visszafele nem igaz (példák a gyakorlaton), valamint határpont lehet eleme az adott halmaznak, de nem eleme is. Ezenkívül a belső, külső és határpontok halmaza diszjunkt, és az uniójuk kiadja az egész $\mathbb{R}^p$ teret. Példaképpen a $B(a, r)$ gömb esetében végignéztük, hogy mik a belső, külső és határpontok. Egy másik példa $\mathbb{R}$-ben a racionális számok halmaza volt, ennek se belső, se külső pontja nincs, minden valós szám határpontja.

Ezután a torlódási pont és az izolált pont fogalmát vezettük be. A H halmaz torlódási pontjának tetszőleges környezetében végtelen sok elem van az adott halmazból (formálisan $\forall r > 0 : B(x, r) \cap H$ végtelen sok elemű). A torlódási pontok halmazát szokás H'-vel jelölni. Izolált pontnak van olyan környezete, amelyben az az egyetlen halmazbeli pont (formálisan $\exists r > 0 : B(x, r) \cap H = \{x\}$). Az izolált pont a definícióból adódóan eleme a halaznak, torlódási pont lehet eleme vagy nem eleme is (például a racionális számok esetében minden valós szám torlódási pont).

Megfogalmaztam (bizonyítás nélkül) a torlódási pont két ekvivalens karakterizációját: bármely környezetében legalább két H-beli elem van; található olyan (x_n) sorozat, amely $H \setminus \{x\}$-ben halad és a határértéke az adott pont. Példaképpen beláttuk, hogy a számegyenesen az egész számok halmazának minden pontja izolált.

Rátértünk a nyílt és zárt halmazok témakörére. Nyíltnak neveztem egy halmazt, ha minden pontja belső pont, más szóval megegyezik a belsejével. Például a $B(a, r)$ gömb nyílt, így valóban jogos a nyílt gömb elnevezés. Zárt egy halmaz, ha a komplementere ($\mathbb{R}^p$-re nézve) nyílt. Rögtön megjegyeztemm, hogy „A halmaz nem ajtó.” Egy halmaz lehet se nem nyílt, se nem zárt, például a számegyenesen az $[a, b)$ intervallum ilyen (ennek meggondolását házinak adtam, vagy gyakorlaton lesz). Sőt, egy halmaz lehet egyszerre nyílt és zárt is, például $\emptyset$ és $\mathbb{R}^p$ ilyenek (van-e más?).

Egy fontos tulajdonsága a nyílt halmazoknak, hogy véges sok metszete nyílt, tetszőlegesen sok (véges vagy végtelen) uniója nyílt. Ezt be is bizonyítottuk. Majd következményként megfogalmaztuk a párját zárt halmazokra: véges sok zárt uniója zárt, tetszőlegesen sok zárt metszete zárt. Ennek bizonyítása a zártság definícióját, a de Morgan-azonosságokat és a nyíltakra vonatkozó eredményt használja. Itt fejeztük be az órát.