Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2017. ősz

4. előadás (október 2.)

Az előadás elején még a hatványsorok témakörét folytattuk, és be is fejeztük.

Elsőként az $\operatorname{arctg} x$ függvény 0 körüli hatványsor előállítását írtuk fel, annak felhasználásával, hogy $\operatorname{arctg}' x = 1/(1+x^2)$, ami mértani sorba fejthető $|x| < 1$ esetén. Ebből integrálással (és $x = 0$ helyettesítés után) kaptuk, hogy $|x| < 1$ esetén

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots.$$

Ebben $x \to 1 - 0$ mellett elvégezhető a határátmenet, mert a bal oldal folytonos függvény, a jobb oldal pedig konvergens az $x = 1$ pontban (hiszen itt Leibniz-típusú), így az Abel-féle folytonossági tétel alkalmazható a jobb oldalra. Mindezek alapján a tetszetős

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

előállítást nyerjük (amely egyébként nagyon lassan konvergál, a π-t nem érdemes ezzel közelítőleg számolni).

A hatványsorok utolsó alkalmazásaként egy kombinatorikai jellegű feladatot oldottunk meg, mégpedig explicit képletet adtunk a Fibonacci-sorozatra. A sorozat rekurzív értelmezése: $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ és $n \geq 1$ esetén $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Tekintettük az úgynevezett generátorfüggvényt:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

Az (indukcióval rögtön adódó) $|u_n| \leq 2^n$ becslés segítségével meggondolható, hogy a sor $|x| < 1/2$ esetén konvergens (valójában bővebb halmazon is), így alkalmazható majd az egyértelműségi tétel. A rekurzió felhasználásával kaptuk, hogy

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1}.$$

Ezt a függvényt két mértani sor összegeként írtuk, majd hatványsorba fejtettük, és az egyértelműségi tételből kaptuk, hogy

$$u_n = \frac{1}{q_1 - q_2}\left(\frac{1}{q_1^n} - \frac{1}{q_2^n}\right),$$

ahol q_1 a pozitív, q_2 a negatív gyöke az $x^2 + x - 1$ polinomnak. Az explicit formulában felbukkan az aranymetszés arányszáma, ez nagyon szép.

Ezután ténylegesen belekezdtünk a többváltozós analízisbe. Első témakörünk az $\mathbb{R}^p$ euklideszi tér. Motivációként a számegyenest és a síkot hoztam fel, az ottani abszolútérték fogalmával. Ennek mintájára $\mathbb{R}^p$ a valós szám p-esek halmaza. Értelmeztük az összeadás és valós számmal való szorzást, az abszolútértéket, a távolságot, a skalárszorzatot. Az abszolútértéknek két egyszerű tulajdonsága: $|cx| = |c| \cdot |x|$ bármely c valós számra, továbbá $|x| \leq |x_1| + \dots + |x_p|$ (ez négyzetre emeléssel igazolható). Egy kevésbé nyilvánvaló tulajdonsága az abszolútértéknek a háromszög-egyenlőtlenség: $|x + y| \leq |x| + |y|$. Ennek bizonyításához először a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget igazoltuk: $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$. A bizonyítás négyzetre emeléssel és némi szumma varázslattal adódott. Megjegyeztem, hogy ha tudjuk azt, hogy $\langle x, y\rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos\varphi$, ahol φ az x és y vektorok közbezárt szöge, akkor az egyenlőtlenség szinte nyilvánvaló. A CBS egyenlőtlenségből (már sokadjára) négyzetre emeléssel kipottyant a háromszög-egyenlőtlenség.

Ezután a különféle gömböket értelmeztük $\mathbb{R}^p$-ben. Szerepelt $B(a, r)$ (a középpontú r sugarú nyílt gömb), $\overline{B(a, r)}$ (zárt gömb), $\dot{B}(a, r)$ (kipontozott gömb) és $\partial B(a, r)$ (gömbfelület). Példaként felrajzoltuk a $p = 1$ esetet, házinak adtam a $p = 2$ eset rajzait.

Az óra utolsó részében a konvergenciát definiáltuk $\mathbb{R}^p$-ben. Formálisan ugyanaz, mint egy változóban: $a_n \to a$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Itt N a küszöbszám, amely nem kell, hogy egész legyen.

Végül tételként kimondtam és be is láttam, hogy $a_n \to a$ pontosan akkor, ha koordinátánként teljesül a konvergencia, azaz $a_n^{(i)} \to a^{(i)}$ minden $i = 1, \ldots, p$ esetén, ahol a felső index az i-edik koordinátát jelöli.