Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2017. ősz

3. előadás (szeptember 25.)

Az előadás első perceiben felidéztem, hogy a hatványsorok témakörét kezdtük el tanulmányozni. A Taylor-sor fogalmát régebbről ismerjük már, az $\exp, \sin, \cos$ példáival találkoztunk. A kérdés most a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ alakú hatványsorok konvergenciahalmaza (KH) és az összegfüggvény tulajdonságai. A múlt órán a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mértani sor példáját láttuk, ennek konvergenciahalmaza a $(-1,1)$ intervallum, összegfüggvénye az $1/(1-x)$.

Második példánk a $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ hatványsor. Ehhez felidéztem a (szám)sorok konvergenciájára és divergenciájára vonatkozó gyök- és hányadoskritériumokat. A hányadoskritérium alkalmazásával (HF: gyökkritériummal) beláttuk, hogy a szóban forgó hatványsorra KH $= [-1,1)$ (a végpontban a Leibniz-kritériumra is szükségünk volt). Bár ez a két példa igen kevés, de mégis azt a sejtést fogalmaztuk meg, hogy egy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciahalmaza az origóra „majdnem szimmetrikus". Mielőtt ezt tétel formájában is kimondtam volna, megjegyeztem, hogy elegendő a 0 középpontú hatványsorok tanulmányozása, hiszen ezekből x_0-lal való eltolással nyerjük az x_0 középpontú hatványsorokat.

Ezután beláttuk, hogy ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergens x_1-ben, akkor konvergens az egész $(-|x_1|, |x_1|)$ intervallumon is. A bizonyításban a (szám)sorok konvergenciájára vonatkozó majoráns kritériumot használtuk, és egy konvergens mértani sorral becsültünk felülről.

Az imént igazolt állítás következményeként adódott, hogy ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsorra bevezetjük az $R := \sup \mathrm{KH}$ jelölést, akkor a hatványsor konvergenciahalmaza a $(-R,R)$, $[-R,R)$, $(-R,R]$, $[-R,R]$ intervallumok valamelyike ($R=0$ esetén csupán az origó, $R=\infty$ esetén az egész számegyenes). Az R-et a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

Kérdésként felmerül, hogy vajon az R konvergenciasugár megadható-e képlettel. Erre vonatkozik a híres Cauchy–Hadamard-tétel: ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsorra létezik $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, akkor ennek a limesznek a reciproka éppen a konvergenciasugár (itt fontos megjegyezni, hogy $1/(0+0) = +\infty$ és $1/(+\infty) = 0$). A tételt nem bizonyítottam (a gyökkritériummal jön ki, ahogy a példában, lásd HF). Helyette néhány hasznosnak vélt megjegyzést tettem. Egyrészt felhívtam a figyelmet, hogy az a_n együttható néha becsapós lehet, mint ahogy a szinusz példájában:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Itt $a_n = 0$, ha n páros, és $a_n = (-1)^k/(2k+1)!$, ha $n = 2k+1$. A másik megjegyzésem arra vonatkozott, hogy a Cauchy–Hadamard-tétel alkalmazása nemtriviális határértékekhez vezethet, mint ahogy az exponenciális függvény esetében:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Itt a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ limeszre lenne szükségünk, amely ugyan még elemien meghatározható (HF aki szeretne gondolkodni: $+\infty$). Ám ha még becsempészünk egy n^n szorzót is, akkor a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n/n!}$ határértékre volna szükség, amely messze nem triviális. Ennek kapcsán érdekességképpen megemlítettem a (bámulatos!) de Moivre–Stirling-formulát: $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$. Ebből könnyen adódik, hogy a szóban forgó limesz éppen e.

E rövid kitérő után az összegfüggvény tulajdonságaival kezdtünk foglalkozni. Bizonyítás nélkül kimondtanm, hogy a pozitív konvergenciasugarú $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor a konvergenciahalmazon folytonos, az esetleges végpontokban féloldalról folytonos (ezt Abel folytonossági tételeként emlegettem); továbbá a konvergenciahalmaz belsejében, azaz $(-R,R)$-en differenciálható, sőt a deriválás tagonként elvégezhető:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots.$$

A bizonyításra csupán annyit mondtam, hogy az egyenletes konvergencia fogalmán múlik.

Következményként megfogalmaztuk, hogy a pozitív konvergenciasugarú $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor 0 középpontú Taylor sora az eredeti hatványsor, így a Taylor-sor előállítja az összegfüggvényt a konvergenciahalmazon. A bizonyítás a tagonkénti differenciálhatóságot használta, amelynek segítségével kaptuk, hogy az f összegfüggvényre $f^{(n)}(0) = n!a_n$.

Még egy következmény szerepelt, mégpedig a hatványsor egyértelműségi tétel: ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ valamely $|x| < r$ halmazon (ahol $r > 0$ tetszőleges szám!), akkor szükségképpen $a_n = b_n$ minden n-re, hiszen mindkettő éppen $f^{(n)}(0)/n!$, ahol f az összegfüggvény.

Alkalmazásképpen a $\log(1+x)$ függvényt írtuk fel hatványsor alakba. Pontosabban először a deriváltját, és ebből integrálásssal, majd $x = 0$ helyettesítéssel kaptuk, hogy $|x| < 1$ esetén

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \tag{1}$$

Végül itt $x = 1$ helyettesítéssel éltünk és így

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots .$$

Mindez azért jogos, mert a hatványsor $x = 1$-ben konvergens (Leibniz), így alkalmazható Abel folytonossági tétele, ezért az (1) azonosság folytonosan kiterjed az $x = 1$ pontra is.