Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2017. ősz

2. előadás (szeptember 18.)

Az előadás elején emlékeztettem az improprius integrálok abszolút konvergenciájának fogalmára: $\int_a^b f$ *abszolút konvergens*, ha $\int_a^b f$ konvergens. Kimondtam újra tételként, hogy az abszolút konvergenciának következménye a konvergencia. A bizonyítás az improprius integrálok konvergenciájára megfogalmazható Cauchy-kritériumon múlik, de ezt kihagyjuk. Megjegyeztem, hogy a konvergenciából általában nem következik az abszolút konvergencia, erre hamarosan lesz példa, de előtte a konvergencia vagy divergencia igazolására két nagyon hasznos elvet fogalmazunk meg: *majorizáció és minorizáció.* Tegyük fel, hogy f és g lokálisan inegrálható függvények az $[a, b)$ intervallumon (ahol $b \in \mathbb{R}$ és $b = \infty$ is lehet), továbbá van olyan $b_0 \in [a, b)$, hogy minden $x \in [b_0, b)$ esetén $|f(x)| \leq g(x)$. Ekkor

(1) ha $\int_a^b g$ konvergens, akkor $\int_a^b f$ abszolút konvergens, tehát konvergens is.

(2) Ha pedig $\int_a^b f$ divergens, akkor $\int_a^b g$ is divergens.

Az elvek bizonyítását is kihagytam, helyette sokkal érdekesebb alkalmazásokat néztünk. Beláttuk, hogy $\int_1^\infty \sin x/x^2\,dx$ és $\int_1^\infty \cos x/x^2\,dx$ (abszolút) konvergensek. Ezután pedig igazoltuk, hogy $\int_1^\infty \sin x/x\,dx$ konvergens, de $\int_1^\infty |\sin x/x|\,dx$ nem konvergens (a sorrendet kissé összekavartam, de végül minden kijött). Érdekességképpen megjegyeztem, hogy $\int_0^\infty \sin x/x\,dx = \pi/2$. További példa volt $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ konvergenciája, itt érdekességképpen felírtam a valószínűségszámításból a normális eloszlás kapcsán jól ismert $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$ összefüggést. Végül további érdekességként a gamma függvényt értelmeztem: $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$. Belátható, hogy $\Gamma(\alpha)$ pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 0$. Ekkor $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, így pozitív egész n esetén $\Gamma(n) = (n-1)!$. A gamma függvény tehát a faktoriális kiterjesztéseként is felfogható, és ekkor meglepő módon kiszámolható, hogy $(-1/2)! = \sqrt{\pi}/2$.

Az improprius integrálok témakörét a sorokkal való kapcsolattal zártuk. Kimondtam a sorok konvergenciájára vonatkozó integrálkritériumot: ha $f\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$ monoton csökkenő függvény, akkor a $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ végtelen (szám- vagy numerikus) sor pontosan akkor konvergens, ha az $\int_1^\infty$ improprius integrál konvergens. A bizonyítás előtt rögtön egy példát néztünk, mégpedig az $f(x) = 1/x^\alpha$ függvényt $\alpha \geq 0$ esetén. Ekkor teljesülnek az integrálkritérium feltételei, így a $\sum_{n=1}^\infty 1/n^\alpha$ hiperharmonikus sor pontosan akkor konvergens $\alpha \geq 0$ esetén, ha az $\int_1^\infty 1/x^\alpha\,dx$ improprius integrál konvergens, vagyis (a múlt óra alapján) $\alpha > 1$. Az $\alpha < 0$ esetben a sor nem lehet konvergens, hiszen $1/n^\alpha \not\to 0$, tehát végeredményben a hiperharmonikus sor pontosan $\alpha > 1$ esetén konvergens. Érdekességképpen megemlítettem, hogy $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \pi^2/6$ (ezt Euler bizonyította), sőt a páros kitevő esetén is expliciten megmondható az összeg, azonban a $\sum_{n=1}^\infty 1/n^3$ sor összegéről eddig csupán annyit tudni, hogy irracionális szám.

Ezután belekezdtünk a hatványsorok témakörébe. Motivációképpen a Taylor-sorokra emlékeztettem. Ha az f függvény akárhányszor deriválható az a pontban, akkor ehhez a ponthoz tartozó *Taylor-sora* $\sum_{n=0}^\infty f^{(n)}(a)/n!(x-a)^n$. Szerepelt korábban egy elégséges feltétel a Taylor-sornak egy I intervallumon való konvergenciájára: ha van olyan K valós szám, hogy minden n nemnegatív egész és $x \in I$ esetén $|f^{(n)}(x)| \leq K$, akkor a Taylor-sor minden $x \in I$ pontban konvergens és összege $f(x)$, más szóval *a Taylor-sor előállítja f-et.* Példaképpen felírtam három (a 0 ponthoz tartozó) nevezetes Taylor-sort:

$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Mindez motiválja, hogy általában mi mondható a $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ alakú sorok konvergenciájáról, milyen pontokban konvergálnak és milyen tulajdonságú függvényt állítanak elő?

Ha (a_n) tetszőleges számsorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$, akkor a $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ sort x_0 *középpontú hatványsornak* nevezzük. Azon x-ek halmaza, amelyre a hatványsor kovergens, a hatványsor *konvergenciatartománya* vagy *konvergenciahalmaza* (nálam a továbbiakban KH). Az $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ függvény, ahol $x \in \text{KH}$, a hatványsor *összegfüggvénye.*

Első példaként a mértani sorra emlékeztettem: $\sum_{n=0}^\infty x^n$ pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 1$, és ekkor az összege $1/(1-x)$. A mértani sor konvergenciahalmaza tehát a $(-1, 1)$ intervallum és összegfüggvénye az $1/(1-x)$ függvény.

Második példa a $\sum_{n=1}^\infty x^n/n$ hatványor volt. Itt hagytuk abba, kértem mindenkit, hogy a következő órára nézze át a sorok konvergenciájára vonatkozó gyök- és hányadoskritéiumot.