Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2017. ősz

12. előadás (december 11.)

Az előadás elején visszatértem két témára a múlt óráról. Először példaképpen felírtuk a $\cos(x+y)$ függvény második Taylor-polinomját a $(0,0)$ körül. Ehhez kiszámoltuk az összes szükséges parciális derivált értékét a $(0,0)$ pontban, és a képlet alapján kaptuk, hogy $T_2(x,y) = 1-(x+y)^2/2$. Megjegyeztük, hogy mindezt a cos függvény egyváltozós Taylor-polinomjának segítségével is megkaphattuk volna, és ez a módszer igen gyakran működik többváltozós esetben.

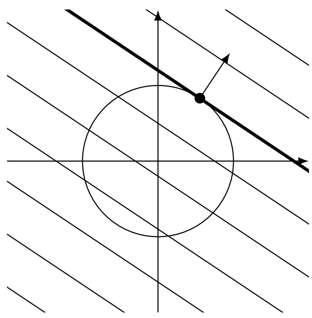
A másik téma a kvadratikus alakok definitsége volt. Kicsit szerettem vona rávilágítani, hogy a kvadratikus alak definitsége hogyan hozható kapcsolatba a mátrix bizonyos tulajdonságaival. Ehhez az alábbi átalakítást mutattam ($\alpha \neq 0$ esetén):

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \frac{1}{\alpha}\left((\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha\gamma - \beta^2)y^2\right).$$

Ebből azonnal látszik például, hogy ha $\alpha > 0$ és $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ (ami éppen a kvadratikus alak mátrixának determinánsa), akkor a kvadratikus alak értéke pozitív az origó kivételével, más szóval a kvadratikus alak pozitív definit. A visszafele irány és a definitség többi esete hasonlóan látható be az iménti átalakítás segítségével.

Ezek után a feltételes szélsőérték témakörébe kóstoltunk bele. Motivációs példaként az $f(x,y) = 2x+3y$ függvénynek az egységkörön felvett legnagyobb értékének megkeresését tűztem ki célul (a feladat a Bevanal2 példatár 114-es feladata). Először megemlítettem, hogy számos elemi megoldás adható: számtani és mértani közép egyenlőtlenségével; számtani és négyzetes közép egyenlőtlenségével; Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséggel. Az egyváltozós analízis eszközeit használhatjuk például úgy, hogy az $x^2+y^2=1$ feltételből kifejezzük y-t (vigyázzunk az előjelekkel!), és aztán már csak egyváltozós függvény szélsőértékét kell keresni.

Most egy, a geometriai szemléleten alapuló megoldást néztünk. Arról van szó, hogy azt a legnagyobb c értéket keressük, amelyre a $2x+3y=c$ és $x^2+y^2=1$ egyenletekből álló rendszernek van megoldása. A síkon utóbbi egy körvonal, előbbi pedig minden c-re egy egyenes, amelyek együttesen egy párhuzamos egyenesekből álló egyenessereget alkotnak. Az az egyenes szolgáltatja a legnagyobb c-t, amely érinti a körvonalat. Meg kell tehát keresni a körvonal azon pontjait, ahol a $2x+3y=c$ irányának megfelelő irányú az érintő, ez már egyszerű koordinátageometria, nem is fejeztük be. Inkább megjegyeztük, hogy az egyenesek éppen az f függvény szintvonalai, a körvonal pedig a $g(x,y) = x^2+y^2-1$ függvény egy szintvonala. Szélsőértékhelyen tehát a két szintvonal érinti egymást, és mivel a gradiens merőleges a szintvonalra, ezért a gradiensek párhuzamosak. Éppen erről fog szólni a feltételes szélsőértékre vonatkozó Lagrange-multiplikátorelv.



Bevezettem ezután a feltételes szélsőérték fogalmát. Legyenek $f, g\colon H \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $g(a) = 0$. Ekkor az f függvénynek az a pontban feltételes lokális szélsőértéke van a $g=0$ feltételre nézve, ha van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $x \in B(a,\delta)$ és $g(x) = 0$, akkor $f(x) \geq f(a)$ a minimum esetben és $f(x) \leq f(a)$ a maximum esetben. Ha f differenciálható a-ban, g differenciálható az a egy környezetében és a parciális deriváltjai folytonososak a-ban, akkor feltételes lokális szélsőértékhelyen vannak olyan λ és μ egyszerre nem 0 számok, hogy $\mu \operatorname{grad} f(a) + \lambda \operatorname{grad} g(a) = 0$. Ez a Lagrange-féle multiplikátorelv. Ennek alkalmazásával megoldottuk a motviációs feladatot. Egy három egyenletből álló rendszert kaptunk, és abból adódtak a szélsőértékhely jelöltek (szélsőérték pedig Weierstrass tétele miatt létezik).

Az óra második felében röviden értelmeztük $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ típusú függvények differenciálhatóságát. Ebből a témakörből a Jacobi-mátrix fogalmára lesz szükségünk jövőre (az integráltranszformáció kapcsán), ezért vesszük most. Megbeszéltük, hogy $\mathbb{R}^p$-ből $\mathbb{R}^q$-ba képező függvénynek p darab változója és q darab koordinátafüggvénye van: $f = (f_1, \dots, f_q)$. A totális differenciálhatóság fogalmának átismétlése és némi motiváció után kimondtam a definíciót. Az f függvény differenciálható a-ban, ha az az értelmezési tartományának belső pontja és létezik olyan $q \times p$-es A mátrix, amellyel érvényes, hogy

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - A(x-a)|}{|x-a|} = 0.$$

Belátható, hogy f pontosan akkor differenciálható a-ban, ha mindegyik koordinátafüggvénye differenciálható a-ban. Ekkor az f függvény Jacobi-mátrixa az a pontban:

$$\begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_p f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \partial_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_q(a) & \partial_2 f_q(a) & \dots & \partial_p f_q(a) \end{bmatrix}.$$

Példaképpen kiszámoltuk az $f(x,y) = (x+y, y^2, xy)$ függvény Jacobi-mátrixát.