Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2017. ősz

11. előadás (december 4.)

Az előadás két fő témája a Taylor-polinomok és a lokális szélsőérték.

Elsőként felidéztem az egyváltozós Taylor-polinomokkal kapcsolatban tanult néhány fontos összefüggést. Ha az f függvény n-szer differenciálható az a pontban, akkor az n-edik Taylor-polinomja a-ban

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n.$$

Ez az f-et az a-ban „legjobban közelítő” legfeljebb n-edfokú polinom. A legjobb közelítést kétféleképpen is megfogalmazhatjuk. Egyrészt bármely $k = 0, 1 \ldots, n$ esetén $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$. Másrészt

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow{x \to a} 0.$$

(Ez utóbbit röviden úgy szokás jelölni, hogy $f(x) - T_n(x) = o((x-a)^n))$, ahol az o úgy olvasandó, hogy „kis ordó”. Ez a jelölés például határértékek kiszámításánál hasznos lehet, egy példát mutattam is, de ez csupán kitekintés volt.) A fenti limesz $n = 1$ esetén a differenciálhatóság ekvivalens megfogalmazása. Illusztrációképpen igazoltam az $n = 2$ esetet a L'Hospital-szabály segítségével, amellyel így az f' differenciálhatóságának megfogalmazását kapjuk. A limesz egy igen hasznos alkalmazásaként megmutattuk, hogy ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) > 0$, akkor f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van.

Ezek után rátértünk a többváltozós esetre. Ha f kétszer differenciálható az $a = (a_1, a_2)$ pontban, akkor a nulladik, első és második Taylor-polinomja ebben a pontban legyen

$$\begin{aligned} T_0(x) = f(a), \qquad T_1(x) &= f(a) + \partial_1 f(a)(x_1 - a_1) + \partial_2 f(a)(x_2 - a_2), \\ T_2(x) = f(a) &+ \partial_1 f(a)(x_1 - a_1) + \partial_2 f(a)(x_2 - a_2) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\partial_{11} f(a)(x_1 - a_1)^2 + 2\partial_{12} f(a)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \partial_{22} f(a)(x_2 - a_2)^2\right). \end{aligned}$$

Rögtön ellenőriztük, hogy teljesül a megfelelő deriváltak egyenlősége: $T_2(a) = f(a)$, $\partial_i T_2(a) = \partial_i f(a)$, $\partial_{ij} T_2(a) = \partial_{ij} f(a)$, ahol $i = 1, 2$ és $j = 1, 2$. Kimondtam bizonyítás nélkül, hogy

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{|x-a|^n} \xrightarrow{x \to a} 0.$$

Ezek után két elnevezést vezettem be. Az f első differenciálja az a-ban:

$$d^1 f(a)(x_1, x_2) = \partial_1 f(a) x_1 + \partial_2 f(a) x_2,$$

amely egy homogén elsőfokú polinom az $x = (x_1, x_2)$ változóban. A homogenitás itt azt jelenti, hogy minden tag foka egy, így $d^1 f(a)(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda d^1 f(a)(x_1, x_2)$. Az f második differenciálja az a-ban:

$$d^2 f(a)(x_1, x_2) = \partial_{11} f(a)(x_1 - a_1)^2 + 2\partial_{12} f(a)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \partial_{22} f(a)(x_2 - a_2)^2,$$

amely egy homogén másodfokú polinom az $x = (x_1, x_2)$ változóban. A homogenitás most azt jelenti, hogy minden tag foka kettő, így $d^2 f(a)(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 d^2 f(a)(x_1, x_2)$. A differenciálok segítségével kapjuk, hogy

$$T_2(x) = f(a) + d^1 f(a)(x-a) + \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a),$$

ahol $x - a = (x_1 - a_1, x_2 - a_2)$ az argumentum (és nem szorzásról van szó!). Szükségünk volt még a kvadtratikus alak fogalmára is. Kvadratikus alakon homogén másodfokú polinomot értünk:

$$q(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2.$$

Ennek egyértelműen megfeleltethető az

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$$

szimmetrikus mátrix. Valójában arról van szó, hogy $q(x_1, x_2) = (x_1, x_2)A(x_1, x_2)^T$ (ez számolással könnyen ellenőrizhető). Észrevettük, hogy $d^2 f(a)$ mátrixa éppen a Hesse-mátrix.

Szükség volt még néhány fogalomra kvadratikus alakokkal kapcsolatban. A q kvadratikus alak pozitív/negatív definit, ha a $(0, 0)$ ponton kívül mindenütt pozitív/negatív; és indefinit, ha felvesz pozitív és negatív értéket is. Belátható, hogy az A mátrixról ezek a tulajdonságok a következőképpen olvashatók le: q pozitív definit, pontosan akkor, ha $\alpha > 0$ és $\det A > 0$; q negatív definit pontosan akkor, ha $\alpha < 0$ és $\det A > 0$; q indefinit, pontosan akkor, ha $\det A < 0$. Mindez a lokális szélsőérték elégséges feltételénél lesz hasznos majd.

Ezzel rá is tértünk a lokális szélsőérték témakörére. Rögtön emlékeztettem a lokális minimum és szigorú lokális minimum fogalmaira (mert voltaképpen ez csak az egyváltozós esetben szerepelt), és házinak adtam a maximum eseteinek felírását. Első tételünk a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele volt: Ha f-nek a-ban lokális szélsőértéke van, és ott léteznek a parciális deriváltjai, akkor azok szükségképpen 0-val egyenlők (tulajdonképpen ezzel az eredménnyel motiválva vezettük be a parciális derivált fogalmát a témakör elején). Ez már egy változóban sem elégséges feltétel (érdemes kétváltozós ellenpéldát konstruálni az x^3 egyváltozós függvényből.) Egy elégséges feltétel a kétszer differenciálható esetben az, hogy $\partial_1 f(a) = \partial_2 f(a) = 0$ és $d^2 f(a)$ pozitív/negatív definit. Ekkor f-nek az a pontban szigorú lokális minimuma/maximuma van. Az indefinit esetben nincs lokális szélsőértéke. Semmit sem igazoltam ezekből, hanem egy konkrét példát néztünk: az $x^3 + y^3 - 9xy$ függvény lokális szélsőértékei. Megkerestük a derivált nullhelyeit, a $(0, 0)$ és $(3, 3)$ adódótt, majd ott kiszámítottuk a második derivált mátrixot, és azt találtuk, hogy a $(0, 0)$-ban indefinit, a $(3, 3)$-ban pozitív definit a megfelelő kvadratikus alak, tehát az origóban nincs lokális szélsőérték, a $(3, 3)$-ban viszont szigorú lokális minimum van, értéke -27.