Többváltozós analízis 1. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2017. ősz

10. előadás (november 27.)

Az előadást azzal kezdtem, hogy újra megfogalmaztam a differenciálhatóság és algebrai műveletek (összeg, szorzat, hányados) kapcsolatáról szóló tételt (minden magától értetődő, csupán a hányados esetében van a szokásos $g(a, b) \neq 0$ extra feltétel, amely persze ugyancsak természetes). Ebből az összegre vonatkozó részt beláttuk, a többit nem. Ezután bizonyítás nélkül kimondtam, hogy ha az $f : H \to \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^2$) függvény differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} H$ pontban és $g : f(H) \to \mathbb{R}$ differenciálható az $f(a, b)$ pontban, akkor $g \circ f$ differenciálható (a, b)-ben. Kicsit meséltem arról, hogy a differenciálási szabályok egy része karakterről karakterre átvihető a többváltozós esetre, de vigyázni kell, hogy mások lesznek az „élőlények" (számok helyett hol vektorok, hol mátrixok, hol pedig továbbra is számok).

Ezek után felidéztem az $f : H \to \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^2$) függvény grafikonjának fogalmát: $\operatorname{graph} f = \{(x, y, f(x, y) : (x, y) \in H\}$, amely egy felület a háromdimenziós euklideszi térben. Ha f differenciálható az (a, b) pontban, akkor a grafikon érintősíkjának egyenlete az $(a, b, f(a, b))$ pontban:

$$z = f(a, b) + \partial_1 f(a, b)(x - a) + \partial_2 f(a, b)(y - b),$$

a sík egy normálvektora tehát $(\partial_1 f(a, b), \partial_2 f(a, b), -1)$. Formálisan:

$$z = f(a, b) + \langle f'(a, b), (x - a, y - b)\rangle,$$

amely az egyváltozós $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ érintőegyenes alakjának általánosítása. Végül megjegyeztük, hogy a differenciálhatóság azt fejezi ki, hogy az f-et az érintősík olyan „jól közelíti" az (a, b) pontban, hogy a maradéktag még a 0-hoz tartó $|x - a|$ kifejezéssel leosztva is 0-hoz tart.

Rátértünk az iránymenti derivált fogalmára. Arról van szó, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvényt megszorítjuk a $t \mapsto (a, b)+t(v_1, v_2)$ (paraméteres alakú) egyenesre, és a kapott függvényt deriváljuk $t = 0$-ban. Az $(a, b) \in \operatorname{int} H$ pontban a $v \in \mathbb{R}^2, |v| = 1$ vektor irányú iránymenti derivált

$$\partial_v f(a, b) := \lim_{t\to 0} \frac{f((a, b) + t(v_1, v_2)) - f(a, b)}{t},$$

amennyiben ez létezik és véges. Speciálisan $v = (1, 0)$ esetén az első, $v = (0, 1)$ választással a második változó szerint parciális deriváltat kapjuk (ha léteznek). Beláttuk, hogy ha f differenciálható (a, b)-ben, akkor ott minden irányú iránymenti deriváltja létezik, és

$$\partial_v f(a, b) = \langle f'(a, b), v\rangle = \partial_1 f(a, b)v_1 + \partial_2 f(a, b)v_2.$$

Megfordítva nem igaz, láttuk, hogy ha $f(x, y) = 1$ az $y = x^2$ parabolán az origó kivételével, valamint $f = 0$ másutt, akkor f-nek az origóban minden irányú iránymenti deriváltja létezik, azonban f mégcsak nem is folytonos az origóban (az átviteli elvet használhatjuk).

Az iránymenti derivált kapcsán még megbeszéltük azt is, hogy a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség alapján $\partial_v f(a, b)$ a gradiens irányában a legnagyobb, és ellentétes irányban a legkisebb. Kicsit még meséltem arról, hogy ez egy jó módszert szolgáltat szélsőérték megkeresésére (gradiens módszer: mindig a gradiens irányában menjünk, ha a legmeredekebben szeretnénk felérni a hegycsúcsra).

Ezután a többszörös differenciálhatóság témaköre következett. Értelmeztük a $\partial_{ij} f(a)$ másodrendű parciális deriváltakat: $\partial_j f(x, y)$ létezik az adott pont egy környezetében, és a $\partial_j f(x, y)$ parciálisderivált-függvény az i-edik változó szerint differenciálható az adott pontban. Az $f(x, y) = \sin x^2 - x \cos y^3$ függvény példáján láttuk, hogy $\partial_{12} f(x, y) = \partial_{21} f(x, y)$. Feltettem azt a kérdést, hogy ez vajon általában is igaz-e? A választ elárultam: nem. A klasszikus példát gondoltuk végig: $f(x, y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ az origón kívül és $f = 0$ az origóban. Ekkor $\partial_{21} f(0, 0) = -1$ és $\partial_{12} f(0, 0) = 1$.

A vegyes deriváltak sorrendjének felcserélhetőségére elégséges feltétel a kétszeres differenciálhatóság: f differenciálható az adott pont egy környezetében, és a parciálisderivált-függvények differenciálhatók az adott pontban. Ekkor Young-tétele szerint (ezt nem bizonyítottuk) $\partial_{12} f(a, b) = \partial_{21} f(a, b)$. A kétszer differenciálható esetben értelmeztem a második derivált (2×2-es) mátrixát (Hesse-mátrix).

Az előadás végén a p-változós függvények totális differenciálhatóságát írtam fel. Az $f\colon H \to \mathbb{R}$ (ahol $H \subset \mathbb{R}^p$) függvény differenciálható az $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \operatorname{int} H$ pontban, ha vannak olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ számok, hogy

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - \alpha_1(x_1 - a_1) - \cdots - \alpha_p(x_p - a_p)|}{|x - a|} = 0.$$

Igaz, hogy ha f totálisan differenciálható a-ban, akkor mindegyik parciális deriváltja létezik és $\alpha_j = \partial_j f(a)$. A folytonosság továbbra is következménye a differenciálhatóságnak, és a differenciálhatóság egy elégséges feltétele az, hogy egy környezetben léteznek a parciális deriváltak és a parciálisderivált-függvények folytonosak a-ban.