Többváltozós analízis 1. vizsgatematika

Osztatlan matematikatanár szak, 2017. ősz

Tudnivalók a vizsgáról. A vizsgákra a Neptunban kell jelentkezni, enélkül nem lehet vizsgázni. A vizsga előtti napon emailben küldök vizsgabeosztást. A vizsgára kényelmes ruhában érdemes jönni, nem kell kiöltözni. Konzultációra általában hétköznap délutánonként 15 órától a Déli tömb 3.619-es szobájában van lehetőség, ha előzetes jelentkezést kapok (akár emailben, akár személyesen). Bármilyen probléma vagy kérdés esetén tessék nyugodtan emailt írni.

A vizsgán ezen a tematikán kívül semmilyen segédeszköz nem használható, üres lap viszont legyen mindenkinél. A vizsga megkezdésekor mindenki egy feladatot és mellé párosítva két tételt húz (amelyek a tételsor három különböző részét fedik le), majd 1 óra felkészülési időt kap. Az elégséges jegy feltétele a **feladat megoldása** (esetleg apróbb segítséggel), a **definíciók és tételek pontos kimondása és értése** (ezt egyszerű kérdésekkel konkrét példákon könnyű ellenőrizni), a **bizonyítások alapgondolatának és főbb lépéseinek ismerete**, továbbá **a húzottaktól eltérő tételekből szúrópróbaszerűen feltett kérdésekre való helyes válaszadás** (e kérdések is definíciók, tételek, ellenpéldák ismeretét és értését ellenőrzik).

Vizsgakérdések.

1. Lokálisan integrálható függvény fogalma. Improprius integrálok konvergenciájának értelmezése az $[a,b)$, $(a,b]$ és (a,b) intervallumokon. Példák: az $\int_0^1 1/x^\alpha\,dx$, $\int_1^\infty 1/x^\alpha\,dx$ és $\int_{-\infty}^\infty 1/(1+x^2)\,dx$ integrálok. Improprius integrál és műveletek (összeg, szorzat).
2. Improprius integrálok abszolút konvergenciája, kapcsolat a konvergenciával. Majorizációs és minorizációs elv. Példák: $\int_1^\infty \sin x/x^2\,dx$, $\int_1^\infty \sin x/x\,dx$, $\int_1^\infty |\sin x/x|\,dx$, $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$.
3. Integrálkritérium. Alkalmazás: hiperharmonikus sorok.
4. Taylor-sorok értelmezése, példák (sin, cos, exp). Hatványsorok értelmezése, konvergenciahalmaz, összegfüggvény. Példa: mértani sor konvergenciahalmaza és összegfüggvénye. Gyökkritérium, hányadoskritérium, Leibniz-típusú sor. Alkalmazás: $\sum_{n=1}^\infty x^n/n$ konvergenciahalmaza.
5. A konvergenciahalmaz belseje szimmetrikus a középpontra. Konvergenciasugár, Cauchy–Hadamard-tétel. Hatványsor összegfüggvényének folytonossága, differenciálhatósága. Taylor-sor és hatványsor kapcsolata. Hatványsor egyértelműség.
6. A $\log(1+x)$ és $\operatorname{arctg} x$ függvények sorfejtései. Behelyettesítések: $\log 2$ és $\pi/4$ előállításai. A Fibonacci-sorozat tagjainak explicit előállítása a generátorfüggvény segítségével.
7. Az $\mathbb{R}^p$ vektortér (elemei és műveletek). Abszolútérték és két egyszerű tulajdonsága, távolság. Skalárszorzat, Cauchy–Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. Háromszög-egyenlőtlenség.
8. Gömbök $\mathbb{R}^p$-ben (felírás abszolútértékkel és anélkül). Pontsorozatok konvergenciája. Koordinátasorozatok konvergenciája.
9. Határérték és műveletek. Bolzano–Weierstrass-tétel. Cauchy-kritérium.
10. Halmaz belső, külső és határpontjai. Halmaz belseje, külseje, határa. Példák: intervallumok, $\mathbb{Q}$, $B(a,r)$. Torlódási pont, izolált pont. Példák: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$. A torlódási pontok ekvivalens jellemzése.
11. Nyílt és zárt halmazok. Példák: intervallumok, gömbök. Nyílt, zárt halmazok metszete, uniója.
12. Zárt halmazok jellemzése. Korlátos és zárt halmazok jellemzése.
13. Valós értékű többváltozós függvények, grafikon, szintvonal. Példák: $\sqrt{x^2+y^2}$; x^2. Környezetek és pontozott környezetek $\mathbb{R}^p$-ben.
14. A p változós függvényhatárérték egységes definíciója és ezek felírása a konkrét esetekben. Példa: x/y határértéke $(2,3)$-ban.

15. Függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv. Alkalmazás: x/y határértéke $(2,3)$-ban és $(0,0)$-ban. Függvényhatárérték és algebrai műveletek.

16. Folytonosság p változós esetben. Példák: koordinátafüggvények; $x^2y/(x^2+y^2)$ folytonos kiterjesztése. Folytonosságra vonatkozó átviteli elv. Folytonosság és algebrai műveletek, kompozíció. Polinomok, racionális törtfüggvények folytonossága.

17. Weierstrass-tétel. Alkalmazás: adott körbe írható maximális területű háromszög.

18. Az $xy(1-x^2-y^2)$ kifejezés szélsőértékei a zárt egységkörlapon. Kétváltozós függvény szekciófüggvényei és parciális deriváltjai. Példák: a tengelyeken $f=0$, másutt $f=1$; $xy/(x^2+y^2)$.

19. Az egyváltozós differenciálhatóság ekvivalens megfogalmazásai. Kétváltozós függvény totális differenciálhatósága. Gradiens. A totális differenciálhatóság kapcsolata a parciális deriváltakkal és a folytonossággal. Példa: a tengelyeken $f=0$, másutt $f=1$; $xy/(x^2+y^2)$; $xy/\sqrt{x^2+y^2}$.

20. Kétváltozós függvény differenciálhatóságának egy elégséges feltétele. Példa a feltétel nem szükségességére. Polinomok, racionális törtfüggvények differenciálhatósága.

21. Differenciálhatóság és algebrai műveletek, kompozíció. Grafikon, érintősík, normálvektor.

22. Iránymenti derivált értelmezése. Differenciálható függvény iránymenti deriváltjának létezése és alakja. Ellenpélda a fordított irányra.

23. Másodrendű parciális deriváltak. Peano ellenpéldája. Kétszeres differenciálhatóság, Young-tétel.

24. Taylor-polinom értelmezése egy változóban. A Taylor-polinom deriváltjai. A maradéktagra vonatkozó határérték és alkalmazása lokális szélsőérték elégséges feltételére.

25. A legfeljebb másodrendű Taylor-polinomok két változóban. Tulajdonságok: derivált és maradéktag. Példa: $\cos(x+y)$ a $(0,0)$ körül. Első és második differenciál. Kvadratikus alak, definitség.

26. Lokális szélsőérték fogalma. Szükséges feltétel, elégséges feltétel lokális szélsőérték létezéséhez. Példa: x^3+y^3-9xy lokális szélsőértékei.

27. Feltételes szélsőérték fogalma. A Lagrange-multiplikátor elv. Példa: $2x+3y$ maximuma az egységkörvonalon.

28. Parciális deriváltak és totális differenciálhatóság a p változós esetben. A differenciálhatóság fogalma $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ típusú függvények esetén. Kapcsolat a koordinátafüggvények differenciálhatóságával. Jacobi-mátrix. Példa: $f(x,y)=(x+y,y^2,xy)$.