Egyváltozós analízis 1 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 3. félév, 2017. ősz

12. előadás (december 11.)

Rátértünk ezután a konvexitás és a derivált kapcsolatára. Először átismételtem a konvexitás fogalmát, valamint felelevenítettem a konvexitásnak a meredekségfüggvény monotonitásával megfogalmazott ekvivalens alakját. Ezután kimondtam (és be is bizonyítottam a következő tételt: ha $f\colon I \to \mathbb{R}$ folytonos és az I-belsejében differenciálható, akkor

$$\begin{aligned} f \text{ konvex } I\text{-n} \quad &\iff \quad f' \text{ monoton növő } I \text{ belsejében,} \\ f \text{ konkáv } I\text{-n} \quad &\iff \quad f' \text{ monoton csökkenő } I \text{ belsejében.} \end{aligned}$$

A tételt összevetve a monotonitásról szóló korábbi eredményünkkel kapjuk, hogy ha $f\colon I \to \mathbb{R}$ folytonos és az I-n kétszer differenciálható, akkor

$$f \text{ konvex } I\text{-n} \quad \iff \quad f'' \geq 0 \text{ az } I \text{ belsejében.}$$

Az is érvényes a múlt órán a szigorű monotonitásra vonatkozó elégséges feltétel alapján, hogy ha $f'' > 0$ (a megfelelő simasági feltételek mellett), akkor f szigorúan konvex I-n. A fordított irányra ellenpéldaként az x^4 függvényt hoztam fel, amely szigorúan konvex, azonban a 0-ban a második deriváltja 0. Végül bevezettem az inflexiós pont fogalmát: f-nek az a pontban inflexiós pontja van, ha értelmezve van egy környezetben, valamint ott differenciálható vagy legalábbis a különbségihányados-függvényének van határértéke (amely lehet nem véges is), továbbá egy bal oldali környezetben konvex (konkáv), egy jobb oldali környezetben pedig konkáv (konvex). A definíció és a konvexitásnak a derivált monotonitásával való megfogalmazása alapján adódik, hogy inflexiós pontban f'-nek lokális szélsőértéke van, ezért $f''(a) = 0$ az inflexiós pont létezésének elégséges feltétele, ha f kétszer differenciálható az a pontban. A feltétel csak elégséges, hiszen az $f(x) = x^4$ függvényre $f''(0) = 0$, de a 0-ban nincs inflexiós pontja. Egy elégséges feltétel az, hogy $f'''(a) \neq 0$. Kérdésként felvetettem, hogy ha egy adott pontban $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$ és $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, akkor abból vajon mire következtethetünk: lokális szélsőértékhely vagy inflexiós pont?

Az előadást az e^x/x függvény teljes vizsgálatával zártuk. Amiket ilyenkor meg kell nézni: értelmezési tartomány, limeszek, derivált és zérushelyei, második derivált és zérushelyei, monotonitási és konvexitási szakaszok, vázlatos grafikon, értékkészlet.