ami a bizonyítandó egyenlőtlenséget jelenti. Egyenlőség csak akkor állhat, ha

$$\frac{a_i}{b_i} = 1,$$

tehát, ha minden elem alá vele egyenlő nagyságú kerül.

II. megoldás: *a)* Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. $n = 1$ tag esetén az állítás nyilvánvaló. (Az egyenlőség jele érvényes.)

b) Tegyük fel, hogy az állítás $n = k$ tag esetére igaz, és vizsgáljunk egy $k+1$ tagú kifejezést. Ha valamilyen i-re $b_i = a_i$, akkor az i-ediktől különböző tagokra külön is igaz, hogy a nevezőben sorrendtől eltekintve ugyanazok a számok szerepelnek, mint a számlálóban. E tagok száma k, tehát összegük az indukciós feltevés szerint legalább k, és az 1 értékű i-edik tagot hozzávéve, a $k+1$ tagú összeg értéke legalább $k+1$.

c) Ha az összeg minden tagja 1-től különböző érték, akkor legyen a_i az a-k közül a legnagyobb, vagy a legnagyobbak egyike, és legyen $b_j = a_i$. Cseréljük fel b_i-t és b_j-t, és hasonlítsuk össze a keletkező S' összeget az eredeti S összeggel. Feltevéseink szerint $b_i < a_i$ és $a_j < b_j = a_i$, tehát

$$S - S' = \frac{a_i}{b_i} + \frac{a_j}{b_j} - \frac{a_i}{b_j} - \frac{a_j}{b_i} = (a_i - a_j)\left(\frac{1}{b_i} - \frac{1}{b_j}\right) =$$

$$= (b_j - a_j)\left(\frac{1}{b_i} - \frac{1}{a_i}\right) > 0,$$

viszont S'-ben az i-edik tag számlálója és nevezője egyenlő, így a *b)* pont szerint értéke legalább $k+1$, tehát

$$S > S' \geqq k+1.$$

Ezzel indukciós bizonyításunkat befejeztük.

Jegyzet. Néhány nevezetes egyenlőtlenség közös forrásáról.* A feladat állítása és több nevezetes egyenlőtlenség is leolvasható lesz a következő probléma megoldásából:

Legyenek

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

és

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

pozitív valós számok, és jelentse

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

a második sorozat egy tetszés szerinti permutációját. Melyik lesz az

$$S = a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n$$

összegek közül a legnagyobb, és melyik a legkisebb?

* Az alábbi észrevételek Szűcs Adolf-tól** származnak. Az alábbiakban az ő – a Matematikai és Fizikai Lapok 1935. évi 42. kötetében (127–133. oldal) – hasonló címen megjelent cikkét vettük alapul.

** Szűcs Adolf (1884–1945) műegyetemi magántanár. A fasizmus áldozataként halt meg.

E kérdésre bizonyos konkrét esetekben – bizonyára – mindenki azonnal megadja a helyes választ. Képzeljük például, hogy egy fiókban 10 forintos, egy másikban 20 forintos, egy harmadikban 50 forintos, egy negyedikben 100 forintos bankjegyek vannak, és hogy jogunk van az egyes fiókokból 3, 4, 5, 6 bankjegyet kivenni, de ránk van bízva, hogy melyikből mennyit veszünk. Bizonyára mindenki legelőnyösebbnek fogja találni, hogy a legtöbbet (6 bankjegyet) abból a fiókból vegye ki, amelyben a legnagyobb bankjegyek vannak, az utána következő legtöbbet (5 bankjegyet) az 50-esek fiókjából és így tovább; viszont, hogy a legkevésbé előnyös az lesz rá nézve, hogy a legtöbb bankjegyet a 10-esek fiókjából veszi, az utána következő legtöbbet a 20-asok fiókjából, és így tovább. Azaz, ha c_1, c_2, c_3, c_4 a 3, 4, 5, 6 számok egy tetszés szerinti permutációját jelentik, akkor

$$10\cdot 6+20\cdot 5+50\cdot 4+100\cdot 3 \leqq 10c_1+20c_2+50c_3+100c_4 \leqq 10\cdot 3+20\cdot 4+50\cdot 5+100\cdot 6.$$

Általában is így van. *Az S összegek közül a legnagyobb az, amelyben a b számok ugyanúgy vannak rendezve, mint az a számok* (azaz a legnagyobb a szorzója a legnagyobb b, a maradó a-k legnagyobbikának szorzója a maradó b-k legnagyobbja stb.*), és *a legkisebb az, amelyben a két számsorozat ellenkezőképpen van rendezve.*

Ha az összes a-k egyenlők, akkor természetesen a b-k bármely sorrendjéhez ugyanakkora S érték tartozik. Hasonló a helyzet, ha az összes b-k egyenlők. Ha van az a-k közt különböző, akkor legyen az a-k sorozatának két különböző eleme $a_r > a_s$, és hasonlítsuk össze az

$$S = a_1c_1+\ldots+a_rc_r+\ldots+a_sc_s+\ldots+a_nc_n$$

összeget a c_r és c_s felcserélésével keletkező S'-vel:

$$S' = a_1c_1+\ldots+a_rc_s+\ldots+a_sc_r+\ldots+a_nc_n.$$

Mivel

$$S'-S = a_rc_s+a_sc_r-a_rc_r-a_sc_s = (a_r-a_s)(c_s-c_r),$$

így S' nagyobb S-nél, ha c_r kisebb, mint c_s, a fordított nagyságviszonynál S a nagyobb.

Adott a-kból és b-kből csak véges számú különböző S összeg képezhető. Ezek között mindig van legnagyobb és legkisebb, és ezek csak az állításunknak megfelelő összegek lehetnek, mert minden más összeg csökkenthető, illetőleg növelhető két c tényező felcserélésével.

A versenyfeladat állítását akkor kapjuk speciális esetként a bizonyított tételből, ha az a-król feltesszük, hogy nagyság szerint vannak rendezve, és

$$b_1 = \frac{1}{a_1},\ b_2 = \frac{1}{a_2},\ \ldots,\ b_n = \frac{1}{a_n}.$$

Ekkor a b-k fordított sorrendben következnek nagyság szerint, mint az a-k, s így az S összegek minimális értéke

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n = n.$$

b) A bebizonyított tétel érdekességét következményei mutatják. Például levezethetjük belőle, hogy *tetszés szerinti*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

* Az a-k közt is, a b-k közt is lehetnek egyenlők. Az egyenlő elemek felcserélésével keletkező sorrendet természetesen nem tekintjük új sorrendnek.

pozitív számok mértani közepe kisebb, mint számtani közepük, kivéve, ha e számok valamenynyien egyenlők, amikor is a két közép megegyezik.*

Legyen ugyanis

$$c = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

a mértani közép, és vezessük be az

$$a_1 = \frac{x_1}{c},\ a_2 = \frac{x_1 x_2}{c^2},\ a_3 = \frac{x_1 x_2 x_3}{c^3},\ \ldots,\ a_n = \frac{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{c^n} = 1;$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1},\ b_2 = \frac{1}{a_2},\ b_3 = \frac{1}{a_3},\ \ldots,\ b_n = \frac{1}{a_n} = 1$$

sorozatokat. A felírás rendjében ez a két sorozat máris ellenkezőképpen van rendezve, tehát

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

kisebb, mint például

$$a_1 b_n + a_2 b_1 + \ldots + a_n b_{n-1},$$

azaz

$$1 + 1 + \ldots + 1 \leqq \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \ldots + \frac{x_n}{c},$$

$$c \leqq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n,$$

azaz

$$\frac{x_1}{c} = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} \cdot \frac{x_3}{c} = \ldots = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{c} = 1,$$

vagyis akkor, ha

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = c.$$

c) Egy CSEBISEV-féle egyenlőtlenséget is levezethetünk mint közvetlen folyományt, az *a)* alatt bebizonyított tételből.

Legyen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

* Vesd össze az I. rész 142–144. old. 1. jegyzetével.

a valós számoknak két *egyformán* rendezett sorozata. Ekkor alaptételünk szerint

$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n = a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n,$$

$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n \geqq a_1b_2+a_2b_3+\ldots+a_nb_1,$$

$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n \geqq a_1b_3+a_2b_4+\ldots+a_nb_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n \geqq a_1b_n+a_2b_1+\ldots+a_nb_{n-1},$$

és összeadással

$$n(a_1b_1+\ldots+a_nb_n) \geqq (a_1+\ldots+a_n)(b_1+\ldots+b_n),$$

vagyis

$$(1)\qquad \frac{a_1b_1+\ldots+a_nb_n}{n} \geqq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+\ldots+b_n}{n}.$$

Hasonlóképpen nyerjük, hogy ha az a és b sorozatok *ellenkezőképpen* vannak rendezve, akkor

$$(2)\qquad \frac{a_1b_1+\ldots+a_nb_n}{n} \leqq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+\ldots+b_n}{n}.$$

d) Például, ha $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok, továbbá $\alpha>0$ és $\beta>0$, akkor az a_i^α és a_i^β számok $(i=1, 2, \ldots, n)$ egyformán vannak rendezve, tehát

$$a_1^{\alpha+\beta}+a_2^{\alpha+\beta}+\ldots+a_n^{\alpha+\beta} \geqq \frac{1}{n}(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_n^\alpha)(a_1^\beta+a_2^\beta+\ldots+a_n^\beta).$$

Ha pedig $\alpha>0$, $\beta<0$ ($a_1, \ldots, a_n$ továbbra is pozitív számok), akkor ellentétes rendezés áll elő, tehát ilyenkor

$$a_1^{\alpha+\beta}+a_2^{\alpha+\beta}+\ldots+a_n^{\alpha+\beta} \leqq \frac{1}{n}(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_n^\alpha)(a_1^\beta+a_2^\beta+\ldots+a_n^\beta).$$

Legyen speciálisan $\alpha=\beta=1$, akkor

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geqq \frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2,$$

másként írva:

$$(3)\qquad \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}},$$

azaz *a számtani közép kisebb, mint a négyzetes közép.*

Az $\alpha=1$, $\beta=-1$ választással az

$$n \leqq \frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami a harmonikus és a számtani közép közti egyenlőtlenség átrendezett alakja. Megjegyezzük, hogy ez az egyenlőtlenség következik a *b)* alatt tárgyalt számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből is. Eszerint ugyanis

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

és

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} \leqq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

A két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeszorozva, az egyenlőtlenség egy átrendezett alakját kapjuk.

Ha az $a_1, \ldots, a_n$ és $b_1, \ldots, b_n$ pozitív számsorozatok ellenkezőképpen vannak rendezve, akkor a (2) és (3)-ból adódó

$$(4) \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leqq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

és

$$(5) \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leqq \sqrt{n(a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + \ldots + a_n^2 b_n^2)}$$

egyenlőtlenségek jobbak, mint a CAUCHY-féle (lásd a 93–94. old. jegyzetét):

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leqq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)}.$$

Ugyanis

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n}\sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)} \cdot \sqrt{n(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)} =$$

$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)}$$

és

$$\sqrt{n(a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + \ldots + a_n^2 b_n^2)} \leqq \sqrt{n\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)} =$$

$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)}.$$

Hogy a szóban forgó két egyenlőtlenség közül melyik jobb, arra nincs általános válasz, mert számpéldákkal igazolható, hogy hol a (4), hol az (5) jobb oldala a kisebb.

* Lásd az I. rész 145–147. old. jegyzetének *d)* pontját (146–147. old.).