Diákoldal

AZ ÉLET ÉS TUDOMÁNY MELLÉKLETE

Matematika

Pósa Lajosnak szeretettel

Kedves Lajos!

A minap kerestelek telefonon. Megint tanultam ugyanis valamit a tanítványaimtól, és az ilyesmit nagyon jó elmesélni. Neked egyrészt és főképpen azért akartam, mert ketten közülük, *Cus* és *Herczegh Attila* a te tanítványaid is; hosszú beszélgetéseink és a táborok után, ahol néha én is ott lehettem, tudom, milyen fontos neked az, ami a tanítványaiddal történik. Azt hiszem, most valami szép matematika történt velük, velünk ott az osztályban, és ez a másik ok, amiért téged kerestelek, mint a legilletékesebbet, ha szép matematikáról van szó.

Nem vetted föl a telefont (pedig általában foglaltat szokott jelezni), aztán másnap megtudtam: az idén alapított *Charles Simonyi* díjat vetted át első kitüntetettként, harmadmagaddal. „Valaki nagyon jól döntött", mondta aztán egy másik tanítványod, kollégám a tantestületben (semmi értelme „volt" tanítványodként emlegetni, de az ok nyilvánvaló). Gratulálunk neked, hajdani és mostani tanítványaid, és *Herczeg János* segítségével ezt a formát találtuk. Fogadd szeretettel!

Tegyük fel, hogy Anti bélyeggyűjteményében bármely megadott bélyegnél nem olcsóbb bélyegből legfeljebb kétszer annyi van, mint Bandi gyűjteményében. Bizonyítsuk be, hogy Anti gyűjteménye legfeljebb kétszer értékesebb, mint Bandié!

Ez lett volna a házi feladat, nem minden hátsó szándék nélkül. Hozzátartozik az igazsághoz, hogy előző óra végén, amikor föladtam, csúnyán összekevertem a feltételeket, pedig egyik kedvenc témám bevezető feladatáról van szó; elég az hozzá, hogy lemaradt a „nem", így a feltételben csak „olcsóbb" szerepelt. Hogy ez mennyire lényeges, mutatta, hogy valaki, némi zavarban, ahogy ez ilyenkor lenni szokott, előállt egy ellenpéldával, én pedig restelkedve elmondtam a javított, remélhetőleg most már valódi változatot. Hogy mentsem a menthetőt, rögtön melléraktam az aznapra szánt példát is, ez volt a kisebbik falat, talán még lesz valami az órából. Meg is csinálták, ahogy kell, de a másikat, az igazit, gondoltam lehangoltan, most már megette a fene, egyáltalán nem könnyű, nem nagyon bírnak vele kapásból, itt az órán. Egyik-másik arcon (ahogy ez ilyenkor lenni szokott), tükröződött az én kedvetlenségem, de elkezdtek dolgozni. Bele is gabalyodtak az ármányos feltételbe, ez rendjén van, ettől nehéz a feladat. Kicsöngettek; dupla matematikaóránk volt, a szünetben mindenki rendezhette sorait. Cusnak kijöhetett valami, mert a szünet után tőle szokatlan határozottsággal nyújtotta magasra a kezét:

– $a_1, a_2,\dots a_n$ azt jelenti – *kezdte* –, hogy Antinak hány bélyege volt az egyes címletekből, $b_1, b_2,\dots b_n$ pedig azt, hogy Bandinak mennyi. Ha valakinek valamilyen címletből egy bélyege sincs, akkor úgy veszem, hogy 0 darab van belőle.

➢ *Ez így elegáns, gondoltam, most nyilván jönnek majd a címletek.* ➢

– Ekkor – *folytatta* – a feladat feltételei a következők: minden i-re igaz, hogy

$$a_i + a_{i+1} + \dots + a_n \le 2(b_i + b_{i+1} + \dots + b_n)\,.$$

➢ *Rendben van, gondoltam, akkor jöjjenek a címletek.* ➢

– A bizonyítandó állítás pedig – *folytatta Cus rendületlenül* – a következő:

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + \dots + a_i \cdot i + \dots + a_n \cdot n \le 2(b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 2 + \dots + b_i \cdot i + \dots + b_n \cdot n)\,.$$

➢ *Micsoda????* ➢

– No várjunk, várjunk, ne olyan hevesen!

Itt már nem tudtam megállni, hogy közbe ne szóljak, pedig újabban egyre gyakrabban sikerül. Közbe **kellett** *szólnom.*

– Ez így csak egy speciális eset. Mi van, ha egy bélyeg mondjuk 60 fillérbe kerül?

– Akkor legyen 10 fillér az egység! – *vágta rá szemrebbenés nélkül.*

➢ *Tényleg, gondoltam, igaza van. Most persze vacakolhatnék irracionális bélyeggel, de hát senki se venne komolyan, jobb, ha hagyom. Az állítás ugyan valós címletekre is igaz, és jó lenne arra is egy bizonyítás...hm... valami határátmenetet...dehát ehhez kicsik. No mindegy, nézzük, mi lesz ebből így!* ➢

– Adjunk össze minden feltételt! Így pont a bizonyítandó állítást kapjuk. – *Cus körbemosolygott.*

– Hogy, hogyan? Lassabban, hogy megértsem!

➢ *Te jó ég, TÉNYLEG! Ennyi az egész. Mindig azt papolom, hogy próbáljanak általánosítani, hogy lássák a fától az erdőt. Óriási!* ➢

– Szóval azt mondod...te csak ezt a speciális esetet nézed és kijön belőle az általános. De hát ez **nagyon** érdekes!

Aztán még átgondoltuk együtt, amit ez a fiú rögtön látott, hogy tényleg, az a_i tag pontosan addig szerepel a j-edik egyenlőtlenségben, amíg a j el nem éri az i-t, tehát *éppen i esetben – nahát! – és pont ez kell a bizonyításhoz, de miközben ezeket szedtem össze hangosan, magamban folyamatosan álmélkodtam. A gyerekek is megérezhettek valamit, mert egyszerre más lett a levegő.*

➢ *Nézzük, mennyit ér ez az óra még, gondoltam. Ma talán bármi megtörténhet!* ≺

– A dolog általánosabban is igaz ám, bármilyen címletekre. A feltételekből igazából azt lehet kihozni, hogy ha a címleteket is bevesszük – és általában lehetnek köztük irracionálisak – akkor

$$a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + \cdots + a_n \cdot c_n \le 2(b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + \cdots + b_n \cdot c_n).$$

Attila *álmatagon jelentkezett.*

– Akkor is meg lehet ugyanezt csinálni. Csak most $c_i - c_{i-1}$ az, amivel szorozni kell.

➢ *Püff neki! Hát persze, az előbb is ezt csináltuk, csak nem vettük észre, akkor ez a különbség mindig 1 volt! Elképesztő!* ≺

– Látja mindenki? Most a $(c_i - c_{i-1})(a_i + a_{i+1} + \ldots + a_n) \le 2(c_i - c_{i-1})(b_i + b_{i+1} + \ldots + b_n)$ alakú egyenlőtlenségeket adjuk össze. Az elején persze vigyázni kell, amikor az i értéke 1.

– Persze, de legyen egy c_0, ami nulla, és akkor ez is stimmel.

– Aha! Ha jól értem, a címleteket növekvően rendezed el, no igen, így teljesül az állítás, de ez kell a bizonyításhoz is, így szorzol minden egyenlőtlenséget nemnegatív számmal! Ugyanazt csináljuk most is mint az előbb, a speciális eset tényleg magában rejtette az általános bizonyítást is. Nézzük csak, a bal és a jobb oldal nyilván ugyanúgy viselkedik, mennyivel is lesz akkor megszorozva a c_i a bal oldalon, ha összeadjuk a beszorzott egyenlőtlenségeket?

➢ *De jó szeme van, látta az egészet !* ≺

– Hát az a_1 most meg lesz szorozva $c_j - c_{j-1}$ -gyel mindaddig, amíg – ugyanúgy, mint az előbb – a j túl nem lépi az i-t, most is i-szer és most az együttható, nézzük csak, igen

$$(c_i - c_{i-1}) + (c_{i-1} - c_{i-2}) + (c_{i-2} - \ldots\ldots - c_1) + (c_1 - c_0) .$$

És ott díszelgett a táblán az örökzöld teleszkóp-összeg, a közbülső tagok megint kiestek és maradt a legelső és a legutolsó, $c_i - c_0$, *ahogy kell! Most már mindenki figyel, és persze megint nagyon jól jön ez a nulla értékű* c_0, *mert így az* a_i *együtthatója tényleg* c_i.

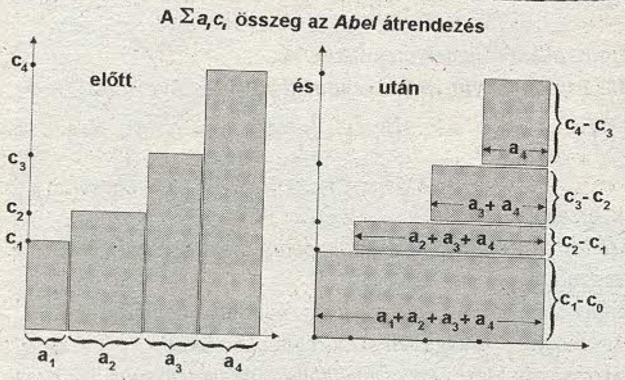
És előttünk állt – számomra is váratlanul – a norvég zseni, Abel diadalmas átrendezése:

$$a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + \cdots + a_n \cdot c_n = (c_1 - c_0)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (c_2 - c_1)(a_2 + \ldots a_n) + \ldots + (c_n - c_{n-1})a_n .$$

Ez az, most már elárulhatom, amiről az óra szólni akart. És sokkal többről szólt.

Budapest, 2000. szeptember

Bálint Márton, Herczegh Attila, Pataki János



Az ábrán a tagok száma 4. Mint látható, a szövevényes algebrai forma geometriai köntösben áttetsző és természetes jelentést kap: ugyanazt a mennyiséget számoljuk össze előbb „oszloponként", azután pedig „soronként".

Az *Abel* átrendezés, algebrai átalakítások és finom becslések hatásos eszköze, ***Niels Henrik Abel*** **(1802–1829) norvég matematikus** nevét viseli.

A hétgyermekes protestáns lelkipásztor legidősebb fia tizenöt éves korában *Newton*, *Euler*, *Lagrange* és *Gauss* munkáit olvasta. Tizennyolc éves korában, édesapja halála után ő lett a családfenntartó.

1821-ben kezdte meg tanulmányait az oslói Christiania Egyetemen, első dolgozata – az integrálegyenletek tárgyköréből – 1823-ban jelent meg. Egy évvel később adta ki az algebra egyik klasszikus nyitott problémájának, az általános ötödfokú egyenlet megoldásának első teljes bizonyítását. 1825-ben és 1826-ban, berlini és párizsi tartózkodása során személyes kapcsolatba került a kor legfontosabb problémáin dolgozó matematikusokkal; ő maga is elképesztő kreativitással és sokoldalúsággal publikálta mélyreható eredmények egész sorát.

Élete a siker és a mellőzöttség megrendítő elegye volt. *Galois*-t *Cauchy* nemtörődömsége, *Bolyai Jánost* pedig *Gauss* pökhendisége nyomasztotta pályájuk során, és a matematika mindkét fejedelme Abel egy-egy hozzájuk küldött dolgozatát olvasatlanul süllyesztette el. Már súlyos tüdőbeteg volt, amikor német barátai állásért folyamodtak számára Berlinben. Egyetemi tanári kinevezését két nappal a halála után postázták.

Ma szobra áll Oslóban, s aki analízist vagy algebrát tanul, lépten-nyomon az ő nevébe ütközik, pedig igazán mély eredményei nem is szerepelnek a hagyományos egyetemi kurzusokon. A legnagyobbak közé tartozott.