

# D i á k o l d a

A Z É L E T É S T U D O M Á N Y M E L L É K L E T E



## Matematika

### Pósa Lajosnak szeretettel

Kedves Lajos!

A minap kerestelek telefonon. Megint tanultam ugyanis valamit a tanítványaimtól, és az ilyesmit nagyon jó elmesélni. Neked egyrészt és főképpen azért akartam, mert ketten közülük, *Cus* és *Herczegh Attila* a te tanítványaid is; hosszú beszélgetéseink és a táborok után, ahol néha én is ott lehettem, tudom, milyen fontos neked az, ami a tanítványaidal történik. Azt hiszem, most valami szép matematika történt velük, velünk ott az osztályban, és ez a másik ok, amiért téged kerestelek, mint a legilletékesebbet, ha szép matematikáról van szó.

Nem vetted föl a telefont (pedig általában foglaltat szokott jelezni), aztán másnap megtudtam: az idén alapított *Charles Simonyi* díjat vetted át első kitüntettként, harmadmagaddal. „Valaki nagyon jól döntött”, mondta aztán egy másik tanítványod, kollégám a tantestületben (semmi értelme „volt” tanítványodként emlegetni, de az ok nyilvánvaló). Gratulálunk neked, hajdani és mostani tanítványaid, és *Herczeg János* segítségével ezt a formát találtuk. Fogadd szeretettel!

**Tegyük fel, hogy Anti bélyeggyűjteményében bármely megadott bélyegnél nem olcsóbb bélyegből legfeljebb kétszer annyit van, mint Bandi gyűjteményében. Bizonyítsuk be, hogy Anti gyűjteménye legfeljebb kétszer értékesebb, mint Bandié!**

Ez lett volna a házi feladat, nem minden hátsó szándék nélkül. Hozzáértározik az igazsághoz, hogy előző óra végén, amikor föladtam, csúnyán összekevertem a feltételeket, pedig egyik kedvenc témám bevezető feladatáról van szó; elég az hozzá, hogy lemaradt a „nem”, így a feltételben csak „olcsóbb” szerepelt. Hogy ez mennyire lényeges, mutatta, hogy valaki, némi zavarban, ahogy ez ilyenkor lenni szokott, előállt egy ellenpéldával, én pedig restelkedve elmondtam a javított, remélhetőleg most már valódi változatot. Hogy mentsem a menthetőt, rögtön melléktam az aznapra szánt példát is, ez volt a kisebbik falat, talán még lesz valami az órából. Meg is csinálták, ahogy kell, de a másikat, az igazit, gondoltam lehangoltan, most már megette a fene, egyáltalán nem könnyű, nem nagyon bírnak vele kapásból, itt az órán. Egyik-másik arcon (ahogy ez ilyenkor lenni szokott), tükröződött az én kedvetlenségem, de elkezdtek dolgozni. Bele is gabalyodtak az ármányos feltételbe, ez rendjén van, ettől nehéz a feladat. Kicsöngettek; dupla matematikaóránk volt, a szünetben mindenki rendezhette sorait. Cusnak kijöhetett valami, mert a szünet után tőle szokatlan határozottsággal nyújtotta magasra a kezét:

–  $a_1, a_2, \dots, a_n$  azt jelenti – kezdte –, hogy Antinak hány bélyege volt az egyes címletekből,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  pedig azt, hogy Bandinak mennyi. Ha valakinek valamilyen címletből egy bélyege sincs, akkor úgy veszem, hogy 0 darab van belőle.

➤ Ez így elegáns, gondoltam, most nyilván jönnek majd a címletek. ◀

– Ekkor – folytatta – a feladat feltételei a következők: minden  $i$ -re igaz, hogy  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_n \leq 2(b_i + b_{i+1} + \dots + b_n)$ .

➤ Rendszerben van, gondoltam, akkor jöjjenek a címletek. ◀

– A bizonyítandó állítás pedig – folytatta *Cus* rendületlenül – a következő:

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + \dots + a_i \cdot i + \dots + a_n \cdot n \leq 2(b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 2 + \dots + b_i \cdot i + \dots + b_n \cdot n)$$

➤ Micsoda???? ◀

– No várjunk, várjunk, ne olyan hevesen!

Itt már nem tudtam megállni, hogy közbe ne szóljak, pedig újabban egyre gyakrabban sikerül. Közbe **kellett** szólnom.

– Ez így csak egy speciális eset. Mi van, ha egy bélyeg mondjuk 60 fillérbe kerül?

– Akkor legyen 10 fillér az egység! – vágta rá szemrebbenés nélkül.

➤ Tényleg, gondoltam, igaza van. Most persze vacakolhatnék irracionális bélyeggel, de hát senki se venne komolyan, jobb, ha hagyom. Az állítás ugyan valós címletekre is igaz, és jó lenne arra is egy bizonyítás... hm... valami határátmenetet... de hát ehhez kicsik. No mindegy, nézzük, mi lesz ebből így! ◀

– Adjunk össze minden feltételt! Így pont a bizonyítandó állítást kapjuk. – *Cus* körbemosolygott.

– Hogy, hogyan? Lassabban, hogy megértsem!

➤ Te jó ég, TÉNYLEG! Ennyi az egész. Mindig azt papolom, hogy próbáljanak általánosítani, hogy lássák a fától az erdőt. Óriási! ◀

– Szóval azt mondod... te csak ezt a speciális esetet nézed és kijön belőle az általános. De hát ez **nagyon** érdekes!

Aztán még átgondoltuk együtt, amit ez a fiú rögtön látott, hogy tényleg, az  $a_i$  tag pontosan addig szerepel a  $j$ -edik egyenlőtlenségben, amíg a  $j$  el nem éri az  $i$ -t, tehát



