Analízis verseny másodéves tanárszakosoknak

2016. tavaszi félév, 3. forduló

Tudnivalók. Minden fordulóban az 1. feladat logikai jellegű (semmilyen előismeret nem szükséges hozzá), a többi pedig az anyaghoz kapcsolódik. Megoldást be lehet adni papíron vagy elektronikusan. Akinek legalább egy helyes megoldása van, csokit kap. A beadási határidő után a megoldásokat megbeszéljük.

Beadási határidő: 2016. május 1. 24:00

1. Állítsuk betűrendbe az 1-től 1000-ig terjedő egész számok számneveit (tehát az egy, kettő, három stb. szavakat). Melyik öt számnév áll a lista elején? Melyik az utolsó öt számnév?

2. Van-e hiba az alábbi bizonyításban?

   Állítás. Minden pozitív szám egyenlő önmaga kétszeresével.

   Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy minden x pozitív számra $x = 2x$. A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt nyilván elég igazolnunk, hogy $\log x = \log 2x$ minden $x > 0$ esetén. Ez utóbbi viszont következik az alábbi egyszerű átalakításból:

   $$\log x = \int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{2}{2x}\, dx = \log 2x.$$

   Ezzel a bizonyítás kész.

3. Számítsuk ki az $1/x$ függvény $[1, 2]$ intervallumhoz tarozó grafikonja alatti síkidom területét az $x_i = 2^{\frac{i}{n}}$ $(i = 0, \dots, n)$ osztópontokhoz tartozó alsó és felső összegek segítségével.

4. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat helyettesítés nélkül! (A sorrend fontos.)

   a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}\, dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx$