Egyváltozós analízis 1 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 3. félév, 2015. ősz

8. előadás (november 4.)

A múlt órai nevezetes függvényhatárértékek témaköréből még erre az előadásra maradt egy család. Ennek első speciális esetével kezdtem: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. A bizonyítást csak vázoltam, a szokásos $n \le x < n+1$ becslések segítségével sorozathatárértékre lehet visszavezetni, és az ottani küszöbszámból a függvényhatárértékhez megfelelo küszöböt nyerhetünk. A tétel párja: $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Ennek a bizonyítása, visszavezetés az előzőre egy trükkös átalakítás segítségével. E limeszcsaládra az órán még később visszatértünk, de előtte szükségünk volt néhány eredményre.

Bele is kezdtünk a függvényhatárérték és kompozíció kérdéskörébe. (Amikor annak idején ezzel először találkoztam, számomra kissé homályos volt, nem mondom, hogy könnyű.) Felvetettem azt a kérdést, hogy ha $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \gamma$ és $\lim_{x\to\gamma} f(x) = \beta$, akkor vajon $\lim_{x\to\alpha}(f \circ g)(x) = \beta$? Rögtön mutattam is erre egy ellenpéldát: $g(x) = 0$ minden x-re, $f(x) = 1$, ha $x \neq 0$ és $f(0) = 1$. Ekkor $\alpha = 0$ választással $\gamma = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$, $\beta = \lim_{x\to\gamma} f(x) = 1$, de $\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = 0 \neq \beta$. A baj az volt, hogy g az α bármely pontozott környezetében felvette a γ értéket. Egy helyes tétel a következő: ha $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \gamma$, $\lim_{x\to\gamma} f(x) = \beta$, továbbá g nem veszi fel a γ értéket az α egy pontozott környezetében, akkor $\lim_{x\to\alpha}(f \circ g)(x) = \beta$. A bizonyításban a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elvet alkalmaztuk. Az iménti tétel plusz feltétele automatikusan teljesül, ha $\gamma = \pm\infty$, így ha $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$ és $\lim_{x\to\infty} f(x) = \beta$ (∞ helyett $-\infty$ is írható mindkét helyen lecserélve), akkor $\lim_{x\to\alpha}(f \circ g)(x) = \beta$. Egy másik lehetséges helyes tétel a következő: ha $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \beta$ és f folytonos (elegendő γ-ban), akkor $\lim_{x\to\alpha}(f \circ g)(x) = f(\gamma)$. Végül még egy helyes állítás, hogy ha mind a külső és mind a belső függvény folytonosak, akkor a kompozíciójuk is (persze lehetne finomítani a kimondást: ha g folytonos a-ban és f folytonos $g(a)$-ban, akkor $f \circ g$ folytonos a-ban). Ezeket az állításokat nem igazoltam, de mindegyik egyszerűen kijön a (függvényhatárértékre és a folytonosságra vonatkozó) átviteli elvekből, a meggondolást házinak adtam. Alkalmazásképen beláttuk, hogy $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b$ A $b = 1$ eset szerepelt az óra elején. Ha $b > 0$, akkor kétszer kell alkalmazni a fenti tételek közül a megfelelőket. Először a $g(x) = x/b$, $\alpha = \infty$, $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ választással kapjuk, hogy $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(x/b)}\right)^{(x/b)} = e$, ezután pedig az x^b függvény folytonosságát elfogadva a háromszorosan összetett $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ függvény limeszét nyerjük, ez e^b. A $b < 0$ eset hasonló, házinak adtam a meggondolását.

Ezek után egy új témát kezdtünk, ez a folytonosság témakörének tortáján a hab. Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények nevezetes tételeit tárgyaljuk. Néhány motiváló példával kezdtem: van-e olyan intervallumon értelmezett folytonos függvény, amelynek nincs maximuma? Felvesze-e két érték között minden értéket egy folytonos függvény? Ezt követően definiáltam egy függvény adott $H \subset D(f)$ halmazon vett maximumát és minimumát, amelyeket $\max_H f$ és $\min_H f$ módon fogok jelölni. Ezután kimondtam Weierstrass első tételét: ha $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ (ahol $a < b$) folytonos, akkor korlátos (az $[a, b]$-n való folytonosságon azt értjük, hogy (a, b) minden pontjában folytonos, továbbá jobbról folytonos a-ban és balról folytonos b-ben). A bizonyítás indirekt módon ment, használtuk a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételt is. Kimondtam Weierstrass második tételét: az előző feltételek mellett f-nek van maximuma és minimuma. A bizonyítás használta a szuprémum definícióját, a kiválasztási tételt és az átviteli elvet is. Megjegyeztem, hogy az intervallum korlátossága és zártsága közül egyik sem hagyható el, lásd az $f(x) = 1/x$ függvényt a $(0, 1)$-en, vagy az x függvényt a $[0; 1)$-en. Az óra utolsó tétele a Bolzano–Darboux-tétel: ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f(a)$ és $f(b)$ között minden értéket felvesz. Speciálisan, ha $f(a)$ és $f(b)$ ellentétes előjelű, akkor van olyan $c \in [a, b]$, amelyre $f(c) = 0$. A bizonyítást elkezdtem, de nem volt ido befejezni, innen folytatjuk.