Egyváltozós analízis 1 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 3. félév, 2015. ősz

6. előadás (október 14.)

Három példával kezdtük az órát. Definíció szerint igazoltuk a következőket:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{2x^2-5}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{x+100}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0+0}\frac{x^2-5x-1}{x^3+6x^2}=-\infty.$$

Ezután az volt a célunk, hogy a múlt órán bevezett 15 féle függvényhatárérték esetet egységesen fogalmazzuk meg. Ehhez átismételtük a különféle környezetfogalmakat (lásd az előző órai összefoglalót). Ezek mellett célszerű volt még bevezetni az $a+0$ pontozott környezetének fogalmát, amely legyen az a jobb oldali pontozott környezete, valamint $a-0$ pontozott környezete legyen az a bal oldali pontozott környezete. Némi motiváció után kimondtam az egységes definíciót: $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\beta$ (ahol α lehetséges értékei $a\in\mathbb{R}, a+0, a-0, +\infty, -\infty$ és β lehetséges értékei $b\in\mathbb{R}, +\infty, -\infty$) jelentse azt, hogy egyrészt f értelmezve van az α egy pontozott környezetében, továbbá a β minden V környezetéhez található az α-nak $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $x\in\dot{U}$ esetén $f(x)\in V$. Néhány konkrét eset szemügyre vételével láttuk, hogy ez a definíció tényleg ugyanaz, mint a korábbi esetek, csak éppen egységesen tárgyalva.

Az egységes definíciót követően az átviteli elvre tértünk rá. Átismételtük a folytonosságra vonatkozó átviteli elvet, majd ennek alapján megfogalmaztam a függvényhatárértékre vonatkozó változatot. A definíció előtt célszerű volt bevezetnei az $x_n\to a+0$ jelölést az $x_n>a, x_n\to a$ konvergenciára, és az $x_n\to a-0$ jelölést az $x_n<a, x_n\to a$ konvergenciára. Ekkor az átviteli elv a következőképpen fogalmazható. Legyen f értelmezve az α egy pontozott környezetében, ekkor $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\beta$ pontosan akkor, ha minden olyan sorozatra, amelyre $x_n\to\alpha$ és $x_n\neq\alpha$, következik $f(x_n)\to\beta$. Megjegyeztem, hogy az $x_n\neq\alpha$ feltevés néha nem ad semmi plusz megszorítást, például $\alpha=\pm\infty$ esetén, de $a\in\mathbb{R}$ esetén viszont igen.

Ezután az átviteli elv következményeit tárgyaltuk: függvényhatárérték és műveletek kapcsolata. Beláttuk, hogy ha $\lim_{x\to\alpha} f(x)=b\in\mathbb{R}$ és $\lim_{x\to\alpha} g(x)=c\in\mathbb{R}$, akkor $\lim_{x\to\alpha}(f(x)+g(x))=b+c, \lim_{x\to\alpha}(f(x)g(x))=bc$, továbbá $c\neq 0$ esetén $\lim_{x\to\alpha}(f(x)/g(x))=b/c$. Ez utóbbi esetben szükségünk volt arra a segédállításra, hogy ha $\lim_{x\to\alpha} g(x)=c\neq 0$, akkor az α egy pontozott környezetében $g\neq 0$. Ezek után beláttuk azt is, hogy ha $\lim_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$ vagy $-\infty$, akkor $\lim_{x\to\alpha} 1/f(x)=0$. Kimondtam azt is, hogy ha $\lim_{x\to\alpha} f(x)=0$, akkor $\lim_{x\to\alpha} 1/|f(x)|=+\infty$. A bizonyítást házinak adtam. Felhívtam a figyelmet arra, hogy $\lim_{x\to\alpha} f(x)=0$ esetén nem következik a $\lim_{x\to\alpha} 1/f(x)$ határértéke létezése, példaképpen elég az $f(x)=x$ függvényt tekinteni a 0 pontban. Ekkor $\lim_{x\to 0} 1/x$ nem létezik, hiszen $\lim_{x\to 0+0} 1/x=+\infty$ és $\lim_{x\to 0-0} 1/x=-\infty$.

Az órát a legelső példával zártam, ahol most már jogosan számolhatjuk a limeszt a szokásos módon, x^2-tel osztva a számlálót és nevezőt, majd ezek határértékeinek hányadosát véve.