Egyváltozós analízis 1 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 3. félév, 2015. ősz

3. előadás (szeptember 22.)

A mai előadáson belekezdtünk a folytonosság témakörébe. Az óra elején motivációképpen felrajzoltam néhány függvénygrafikont, hogy lássuk, milyen sokféleképpen viselkedhetnek a függvények egy adott pont körül. Ezeket fogjuk a következőkben matematikailag megfogalmazni. Egy másik motiváció a mérési hibákból adódik: ha kíváncsiak vagyunk az $f(x_0)$ függvényértékre, de az x_0 értéket a mérési hibák miatt csak közelítőleg ismerjük, akkor vajon $f(x_0 + \text{pici})$ közel lesz-e az $f(x_0)$-hoz?

Mindezek után rátértünk a pontos definícióra. Először egy $a \in \mathbb{R}$ pont $\delta > 0$ sugarú környezetét értelmeztük, amely az $(a - \delta, a + \delta)$ intervallum. Egy f függvényt folytonosnak nevezünk az $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha egyrészt értelmezve van az a egy környezetében, továbbá

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x(|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Megjegyeztük, hogy szemléletesen arról van szó, hogy adott ε-hoz olyan δ-t kell megadni, hogy a δ sugarú környezet felett az f grafikonja az $f(a)$ körüli ε sugarú sávban halad. Azt is érdemes észrevenni, hogy nem kell a legjobb δ-t megadni, elég egyet, és ha egy adott ε-hoz valamilyen δ jó, akkor bármely $\delta' < \delta$ is megfelel. Ha pedig δ jó választás ε-hoz, akkor bármely $\varepsilon' > \varepsilon$-hoz is megfelel (ez utóbbi észrevételt használjuk például, amikor ε-ról feltételezzük, hogy pici – „annak ellenére, hogy azt az ellenség adja, így mi nem szólhatunk bele”).

A definíció után példák következtek: $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, mindegyik folytonos bármely $a \in \mathbb{R}$ pontban, és ezt a definíció alapján igazoltuk is. Az x^2 esetében két bizonyítást mutattam, egy teljesen formálisat, valamint egy grafikusat (az utóbbi okoskodással mindig vigyázzunk, mert a szemlélet gyakran becsaphat). Megmutattuk azt is, hogy az előjelfüggvény a 0 pontban nem folytonos. Kimondtam, hogy a Dirichlet-függvény sehol sem folytonos, illetve az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvény csak a 0 pontban folytonos (ezeket várhatóan megnézzük gyakorlaton).

Mindezek után rátértünk a bal és jobb oldali folytonosságra. Ehhez a $\delta > 0$ sugarú bal és jobb oldali környezeteket vezettük be, ezek rendre az $(a - \delta, a]$ és $[a, a + \delta)$ intervallumok. Ekkor az f függvényt jobbról folytonosnak hívjuk az $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha egy jobb oldali környezetében értelmezve van, továbbá

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x(a \leq x < a + \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Balról folytonos az f függvény az a pontban, ha egy bal oldali környezetében értelmezve van, továbbá

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x(a - \delta < x \leq a \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Példaképpen igazoltuk, hogy az $[x]$ függvény minden pontban jobbról folytonos. Kimondtam, de nem igazoltam, hogy a $\{x\}$ függvény is minden pontban jobbról folytonos. Megjegyeztem, hogy a definíció alapján világos, hogy ha egy f függvény értémezve van az a pont egy környezetében, akkor pontosan akkor folytonos, ha balról és jobbról is folytonos. Gyakorlaton sok példa lesz (bal és jobb oldali) folytonosság definíció szerinti bizonyítására.

Az óra végén egy kis motviáció után az átviteli elvet mondtam ki, de a megértése a következő előadáson fog következni.