Egyváltozós analízis 1 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 3. félév, 2015. ősz

1. előadás (szeptember 9.)

Az óra elején megszavaztuk, hogy 10:05-kor kezdünk, 45 perc elteltével egy 5 perces szünetet tartunk, és így 11:40-kor lesz vége az előadásnak. Ezután röviden elmondtam a tárggyal kapcsolatos legfontosabb információkat; minden részletesen elolvasható az `http://abesenyei.web.elte.hu` oldalon, de a lényeg, hogy a számonkérés változatlan a múlt félévhez képest. Jeleztem, hogy a hivatalos tematikát biztosan nem fogjuk végigvenni, a differenciálszámítást a következő félévben folytatjuk.

Mielőtt belekezdtem az analízisbe még felolvastam egy idézetet Mérő László: A csodák logikája című könyvéből, amelyben leírja, hogy szerinte miért is kell az egyetemen olyan dolgokat tanulni, amelyek nagy részének soha nem vesszük hasznát később. Az idézetet beszkenneltem, és feltettem a kurzus oldalára.

Ezután belekezdtünk az anyagba. Az első óra célja a függvényekkel kapcsolatos legfontosabb fogalmak átismétlése. Azzal kezdtem, hogy a függvény, leképezés, hozzárendelés szavak szinonímák, és a függvényt alapfogalomnak tekintjük (bár halmazelméletre visszavezethető). Egy $f\colon A \to B$ függvény kapcsán megbeszéltük az értelmezési tartomány, értékkészlet, halmaz képe, halmaz ősképe fogalmakat (utóbbira példát is néztünk, az őskép akár üreshalmaz is lehet, például $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ esetén $f^{-1}([-2,-1]) = \emptyset$). Ezt követően az injektív, szürjektív és bijektív tulajdonságokat definiáltuk és néztünk példát is (az $f\colon A \to B, f(x) = x^2$ függvény különböző A, B valós számhalmazokkal). Hangsúlyoztam, hogy például az a kérdés, hogy az x^2 függvény a legbővebb halmazon értelmezve injektív-e, értelmetlen matematikailag (mert lényeges, hova képezőnek tekintjük). Injektív függvény esetén értelmeztem az inverz fogalmát, amely $f^{-1}\colon R(f) \to D(f)$, és $f^{-1}(b) = a$, ha $f(a) = b$. Megjegyeztem, hogy injektív f mellett egy $D \subset R(f)$ halmaz esetén az $f^{-1}(D)$ jelölés lehet a D halmaz ősképe f által, de a D halmaz képe f^{-1} által is (a két dolog persze ugyanaz, csak más szemszögből nézzük).

Ezt követően rátértünk a függvények közötti műveletekre: összeg, különbség, szorzat, hányados és kompozíció. Definiáltuk az értelmezési tartományokat (például $D(f/g) = \{x \in D(f) \cap D(g) : g(x) \neq 0\}$) és a hozzárendelési szabályt ($(f/g)(x) := f(x)/g(x)$). Egy példával ($f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$) illusztráltam, hogy a kompozíció művelete nem kommutatív.

Az óra utolsó részében valós függvények különböző tulajdonságait ismételtük át. Valós függvénynek azon $f\colon A \to B$ függvényeket neveztem, amelyekre $A, B \subset \mathbb{R}$. Az alábbi definíciók szerepeltek: páros, páratlan (megemlítettem a grafikon tulajdonságát is), periodikus függvény (itt példaképpen beláttuk, hogy a Dirichlet-függvénynek minden racionális szám periódusa, tehát nincs legkisebb pozitív periódusa; és volt a törtrész-függvény, mint 1 szerint periodikus függvény; továbbá feltettem azt a kérdést, hogyan magyaráznánk el egy középiskolásnak, hogy az egészrész-függvény nem periodikus). Ezután következett az adott halmazon alulról és felülről korlátosság, korlátosság, (szigorú) monoton növekedés és csökkenés definíciója. Utolsó gondolatként megjegyeztem, hogy a konstansfüggvény monoton növő és csökkenő is egyben. Következő órán a konvexitással foglalkozunk részletesen.