

A dolgozat értéke osztályzatban 2-vel kevesebb a hibátlanul megoldott feladatok számánál. Az előadáson kimondott tételek és a gyakorlatokon bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Tétel volt előadáson, hogy...” vagy „Gyakorlaton bizonyítottuk, hogy...”), kivéve, ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

Semmilyen segédeszköz nem használható, számológép sem! Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos!

1. Számítsuk ki a következő sorok összegét! Melyik sor konvergens?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

2. Legyen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Injektív-e, szürjektív-e az f függvény?
3. Tegyük fel, hogy az f függvény a teljes számegyenesen szigorúan monoton csökken. Következik-e ebből, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$?
4. Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x}\right)^x$ határértéket!
5. Bizonyítsuk be, hogy a $\sin x = \frac{1}{x}$ egyenletnek végtelen sok valós gyöke van!
6. Adjuk meg a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(2-x)^2}$ határértéket, és a definíció alapján bizonyítsuk be az eredményt!
7. Számítsuk ki az $f(x) = \sqrt{x-3}$ függvény deriváltját a definíció szerint az $a = 7$ pontban!