Differenciálegyenletek előadás

Matematika BSc/BiztMat MSc

2021. ősz

Ennek az előadásvázlatnak az a célja, hogy címszavakban összefoglalja és átláthatóbbá tegye az előadásokon elhangzott témaköröket és a félév végén vizsgatematikaként szolgáljon.

1. előadás (szeptember 8.)

- **Tájékoztató a félévről.**
- **Mese a pillanatnyi sebességről és gyorsulásról**
- **Példák közönséges differenciálegyenletekre:** Newton 2. törvénye, korlátlan növekedés modellje (megoldással), korlátozott növekedési modell; Newton lehűlési törvénye, SIR járványterjedési modell (KDE rendszer).
- **Néhány alapfogalom:** KDE, lokális és globális alak, rend, explicit, implicit, n-edrendű explicit KDE (spec. $n = 1$), elsőrendű explicit KDE rendszer.

2. előadás (szeptember 15.)

- **Explicit egyenletek:** n-edrendű egyenlet visszavezetése n egyenletből álló rendszerre, kezdetiérték-feladat (Cauchy-feladat).
- **Közvetlenül integrálható egyenletek:** miért intervallumon, integrálszámítás alaptétele.
- **Szeparábilis egyenletek:** alak, általános megoldási módszer, példa „fizikus” módszerre.
- **Szeparábilisra visszavezethető egyenletek:** $x'(t) = g(t + x(t) + d)$ alakú egyenletek, homogén fokszámú egyenletek.
- **Elsőrendű lineáris egyenletek:** alak, homogén és inhomogén egyenlet, megoldás integráló tényezővel, homogén összes és inhomogén partikuláris megoldás, próbafüggvény módszere egy példán.

3. előadás (szeptember 22.)

- **Másodrendű lineáris KDE-ek:** általános alak, homogén/inhomogén eset, rendszerré átalakítás, Wronski-determináns, tétel az $e^A(t)W(x_1, x_2)$ kifejezésről bizonyítással, függetlenség a $W(x_1, x_2) \neq 0$ esetben, bázis a $W(x_1, x_2) \neq 0$ esetben bizonyítással, alaprendszer.
- **Állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris KDE-ek:** megoldás keresése $e^{\lambda t}$ alakban, karakterisztikus egyenlet, megoldások és alaprendszerek a gyökök függvényében.
- **Másodrendű inhomogén lineáris KDE-ek:** partikuláris megoldás keresése az állandók variálásának módszerével (csak ötlet), próbafüggvény módszer az állandó együtthatós esetben (trigonometrikus, exponenciális, polinom jobb oldal esetén használható).

4. előadás (szeptember 29.)

- **Harmonikus rezgőmozgás** rugómozgás, harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete, homogén megoldás, természetes frekvencia, periodikus külső erő, inhomogén megoldás két esete, rezonancia.
- **Elsőrendű explicit KDE megoldhatósága:** kiindulási feladat, megoldás jelentése, példák megoldás nem létezésére, Peano-féle egzisztenciatétel, a bizonyítás alapgondolata az Euler-féle töröttvonalak, az Euler-féle töröttvonalak az $x'(t) = x(t), x(0) = 1$ feladaton, példák nem egyértelműségre (lokális és globális esetben).

5. előadás (október 6.)

- **Egyértelmű megoldhatóság:** második változóban globális Lipschitz-feltétel, példák, Picard–Lindelöf-tétel, Gronwall-lemma és bizonyítása, a Picard–Lindelöf-tétel egyértelműségi részének bizonyítása egy dimenzióban, a létezése bizonyításának ötlete (fixpont keresése), szukcesszív approximáció módszere egy példán, globális megoldás és határtól határig terjedés.

6. előadás (október 13.)

- **Lineáris KDE rendszerek megoldhatósága:** lineáris rendszer alakja; mátrix értékű függvény folytonosságának jelentése; a jobb oldal lokális Lipschitz-tulajdonsága a második változóban; megoldás létezése, egyértelműsége és a lehető legbővebb intervallumon való értelmezhetősége (utóbbi biz.); alkalmazás n-edrendű lineáris egyenletekre;
- **Lineáris KDE rendszerek megoldásainak előállítása:** a homogén megoldások vektorteret alkotnak; a vektortér dimenziója n (biz.); homogén megoldások függetlensége és egy pontban való függetlenség; alaprendszer és alapmátrix fogalma; az alapmátrix tulajdonságai és a homogén megoldások előállítása (biz.), példák.