Parciális differenciálegyenletek előadás
Matematika BSc 6. félév

2019/2020. tavasz

Hol tartunk?

Ennek az előadásvázlatnak az a célja, hogy címszavakban összefoglalja és átláthatóbbá tegye az előadásokon elhangzott témaköröket. A vizsga anyaga minden, ami ebben az összefoglalóban szerepel, kivéve a „mese” jelzővel ellátott részek. Bizonyítani csak azokat az állításokat kell tudni, amelyek után a „biz.” rövidítés olvasható zárójelben, tehát azokat nem, ahol „nem biz.” vagy „biz. ötlete” vagy „biz. vázlata” szerepel.

1. előadás (február 12.)

- **Tájékoztató a félévről.**
- **Alapfogalmak:** jelölések ($\partial_t, \partial_x, \partial_x^2, \dots$), multiindex = $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, abszolútértéke = deriválás rendje, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, PDE fogalma (mese), rend, klasszikus megoldás, mellékfeltételek (perem, kezdeti), korrekt kitűzésű feladat (létezés, egyértelműség, folytonos függés);
- **Fizikai példák:** hullámegyenlet egydimenzióban (húr rezgése), magasabb dimenziós hullámegyenletek, hővezetési egyenlet (rúd hőmérséklete) egy dimenzióban, több dimenziós hővezetési egyenlet, Poisson- és Laplace-egyenlet, további példa: biharmonikus egyenlet.

2. előadás (február 19.)

- **Másodrendű, főrészében lineáris egyenletek osztályozása:** általános alak, főrész, előzetes feltevés ($a_{jk} = a_{kj}$), együtthatómátrix, sajátértékek előjele, elliptikus, hiperbolikus, parabolikus egyenlet, példák (hullámegyenlet, hővezetési egyenlet, Poisson-egyenlet);
- **Másodrendű lineáris egyenletek kanonikus alakja állandó együtthatós esetben:** a főrész transzformációjának ötlete (főtengelytétel, új változó bevezetése), az alacsonyabb rendű tagok transzformációjának ötlete (új függvény bevezetése exponenciális szorzótényező segítségével), kanonikus alak a különböző esetekben (Helmholtz-egyenlet);
- **A $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály:** jelölések ($C^k(\Omega), k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ esetekben), tartó (support), kompakt tartójú függvények, $C_0^\infty(\Omega)$, példa: η függvény (biz. csak a lényege), η_ε és tulajdonságai.

3. előadás (február 26.)

- **A $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály:** az approximációs tétel (biz. a folytonos eset), $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $L^p(\Omega)$-ban $1 \le p < \infty$ esetén (nem biz.), kompakt halmazon 1-gyel egyenlő kompakt tartójú sima függvény konstruálása (biz. lényege), egységosztás tétele (biz.);
- **Disztribúciók alapfogalmai:** konvergencia $\mathscr{D}(\Omega)$-ban, a disztribúció fogalma, folytonosság jelentése (sorozatfolytonosság), példa: Dirac-delta (biz.).

4. előadás (március 4.)

- **Disztribúciók alapfogalmai:** a folytonosság ekvivalens megfogalmazása (biz.), T_f folytonossága (biz.), reguláris disztribúció egyértelműen meghatározza melyik lokálisan integrálható függvényhez tartozik (biz.);
- **Disztribúciók egyenlősége:** globális és lokális egyenlőség fogalma, a két fogalom ekvivalenciája (biz.), disztribóció tartója, példák: $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$, $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$ (nem biz.);

- **Algebrai műveletek disztribúciókkal:** összeadás, számmal szorzás, sima függvénnyel szorzás, $\mathscr{D}'(\Omega)$ vektortér;
- **Disztribúciók differenciálása:** motiváció ($\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$ legyen), $T_{\partial^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(\partial^\alpha \varphi)$ (nem biz.);