9. feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2020. tavasz

1. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg a következő operátorok sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

   a) $D(L) = \{u \in C^2(0,a) \cap C([0,a]) : u(0) = u(a) = 0\}, \quad Lu = -u''$,

   b) $D(L) = \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u'(0) = u'(a) = 0\}, \quad Lu = -u''$.

2. Legyen $T = (0,a) \times (0,b) \subset \mathbb{R}^2$ $(a, b > 0)$, és határozzuk meg az alábbi operátorok sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

   a) $D(L) = \{u \in C^2(T) \cap C(\overline{T}) : u|_{\partial T} = 0\}, \quad Lu = -\Delta u$,

   b) $D(L) = \{u \in C^2(T) \cap C^1(\overline{T}) : \partial_\nu u|_{\partial T} = 0\}, \quad Lu = -\Delta u$.

3. Legyen $T = (0,\pi)^2$ és oldjuk meg a következő elliptikus peremérték-feladatokat!

   a) $\begin{cases} -\Delta u = x + y & T\text{-ben}, \\ u|_{\partial T} = 0, \end{cases}$

   b) $\begin{cases} -\Delta u = 3\sin x \sin 4y - 8 \sin 2x \sin 5y & T\text{-ben}, \\ u|_{\partial T} = 0, \end{cases}$

   c) $\begin{cases} -\Delta u = \cos x \cos y & T\text{-ben}, \\ \partial_\nu u|_{\partial T} = 0. \end{cases}$

*4. Legyen $T := (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$, valamint $\Gamma_1 := \{\pi\} \times [0,\pi)$, $\Gamma_2 := (0,\pi] \times \{\pi\}$, $\Gamma_3 := \{0\} \times (0,\pi]$, $\Gamma_4 := [0,\pi) \times \{0\}$, továbbá legyenek $g, h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, amelyekre $\begin{cases} h|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 1, & h|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0, \\ g|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0, & g|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 1. \end{cases}$ Oldjuk meg az alábbi peremérték-feladatot!

$$\begin{cases} -\Delta u = \sin x \cos 3y - 5 \sin 3x \cos 4y & T\text{-ben}, \\ (g\partial_\nu u + hu)|_{\partial T} = 0 \end{cases}$$

5. Oldjuk meg a következő parabolikus vegyes feladatokat!

   a) $\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = x & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$

   b) $\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = \sin 3x - 4 \sin 5x & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$

   c) $\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = \sin 2x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$

   d) $\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = t \sin x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$