

8. feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2020. tavasz

- *1. Mutassuk meg, hogy \mathbb{R}^n -ben a $\Delta u = 0$ Laplace-egyenlet elforgatásra nézve invariáns, azaz ha Q $n \times n$ -es ortogonális mátrix, akkor a $v(x) = u(Qx)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) függvényre $\Delta v = 0$.
2. Keressük meg a $\Delta u = 0$ egyenlet $u(x) = v(|x|)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) alakú (más szóval radiálisan szimmetrikus) megoldásait, ahol $v: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény.
3. Legyen a továbbiakban $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, továbbá $p \in C^1(\overline{\Omega})$, amelyre $p(x) \geq m > 0$ minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén. Definiáljuk az $Lu := -\operatorname{div}(p\nabla u) = -\sum_{i=1}^n \partial_i(p\partial_i u)$ másodrendű differenciáloperátort. Bizonyítsuk be, hogy L egyenletesen elliptikus operátor.
4. Legyen L a 3. feladatban definiált operátor.
- a) Legyen $D(L) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0, Lu \in L^2(\Omega)\}$ Igazoljuk, hogy ekkor az $L: L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ operátor szimmetrikus, azaz $\langle Lu, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Lv \rangle_{L^2(\Omega)}$ minden $u, v \in D(L)$ esetén, továbbá L szigorúan pozitív, azaz $\langle Lu, u \rangle_{L^2(\Omega)} > 0$ minden $u \in D(L)$, $u \neq 0$ esetén.
- b) Legyen $D(L) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0, Lu \in L^2(\Omega)\}$ Igazoljuk, hogy ekkor az $L: L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ operátor szimmetrikus, azaz $\langle Lu, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Lv \rangle_{L^2(\Omega)}$ minden $u, v \in D(L)$ esetén, továbbá L pozitív, azaz $\langle Lu, u \rangle_{L^2(\Omega)} \geq 0$ minden $u \in D(L)$ esetén, és egyenlőség csak $u \equiv c \in \mathbb{R}$ esetén állhat fenn.
5. Mutassuk meg, hogy a Dirichlet-feladatnak legfeljebb egy $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ -beli megoldása lehet, a Neumann-feladat $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ -beli megoldásai pedig csak konstansban térhetnek el egymástól.
6. Igazoljuk, hogy ha L a 3. feladatban definiált operátor és $D(L) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0, Lu \in L^2(\Omega)\}$, akkor $R(L) \subset \ker(L)^\perp$, azaz ha $\begin{cases} Lu = f & \Omega\text{-ban,} \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$ akkor $\int_\Omega f = 0$.
7. Legyen $\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Bizonyítsuk be, hogy a $\begin{cases} \Delta u = 1 & \Omega\text{-ban,} \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$ feladatnak nincs $u \in C^2(\overline{\Omega})$ megoldása.
8. Legyen $B_1(0)$ az origó középpontú 1 sugarú nyílt körlap. Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén van az alábbi peremérték-feladatnak $u \in C^2(B_1(0)) \cap C^1(\overline{B_1(0)})$ megoldása? Adjuk meg a megoldásokat!

$$\begin{cases} \Delta u = \alpha & B_1(0)\text{-ban,} \\ \partial_\nu u|_{\partial B_1(0)} = 1. \end{cases}$$

9. Legyen $B_1(0)$ az origó középpontú 1 sugarú nyílt körlap, továbbá $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x + 2y^2 < 1\}$ (egy ellipszis belseje). Oldjuk meg az alábbi peremérték-feladatokat!
- a) $\begin{cases} \Delta u = x + y & B_1(0)\text{-ban,} \\ u|_{\partial B_1(0)} = 0. \end{cases}$
- b) $\begin{cases} \Delta u = x & B_1(0)\text{-ban,} \\ u|_{\partial B_1(0)} = y^2. \end{cases}$
- c) $\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{a } T \text{ tartományban,} \\ u|_{\partial T} = x^2. \end{cases}$