

7. feladatsor  
III. éves alkmát parcdiff 2020. tavasz

1. Tekintsük a

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben,} \\ v(0, x) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n), \\ \partial_t v(0, x) = f(\tau, x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

feladatcsaládot, ahol  $f \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$  és  $\tau \in \mathbb{R}_0^+$  paraméter. Tegyük fel, hogy minden  $\tau \in \mathbb{R}_0^+$  esetén a feladat  $v(\cdot, \cdot; \tau)$  megoldására  $v, \partial_t^2 v, \Delta v \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$ . Értelmezzük ekkor az  $u$  függvényt a következőképpen:

$$u(t, x) = \int_0^t v(t - \tau, x; \tau) d\tau.$$

Igazoljuk, hogy  $\partial_t^2 u - \Delta u = f$   $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ -ben,  $u(0, x) = 0$  és  $\partial_t u(0, x) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ), azaz  $u$  megoldása a második részfeladatnak! (Duhamel-elv)

2. Legyen  $w$  a következő feladat megoldása:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben,} \\ w(0, x) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n), \\ \partial_t w(0, x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy  $w \in C^3(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n)$ , és legyen ekkor  $u(t, x) = \partial_t w(t, x)$  ( $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$ ). Igazoljuk, hogy  $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$   $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ -ben,  $u(0, x) = g(x)$  és  $\partial_t u(0, x) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ), azaz  $u$  megoldása a harmadik részfeladatnak!

3. Oldjuk meg  $n = 1$  esetén az első részfeladatot!

4. Bizonyítsuk be, hogy  $n = 1$  és  $g \in C^2(\mathbb{R})$  esetén a harmadik részfeladat megoldása  $u(t, x) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t))$  ( $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ ).

5. Oldjuk meg a következő Cauchy-feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = t - x & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = \sin x & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0, x) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

6. Legyen  $u$  a következő feladat megoldása:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0, x) = h(x) & (x \in \mathbb{R}), \end{cases}$$

ahol  $g, h \in C(\mathbb{R})$ . Mutassuk meg, hogy ha  $\text{supp } g, \text{supp } h \subset [a, b]$ , akkor  $\text{supp } u(t, \cdot) \subset [a-t, b+t]$  minden  $t > 0$  esetén. (Véges sebességű hullámterjedés)

7. Igazoljuk  $n = 1$  esetén, hogy a hiperbolikus Cauchy-feladat  $u$  megoldása folytonosan függ  $h$ -től a következő értelemben: ha  $h_1, h_2 \in C(\mathbb{R}^n)$ , amelyekre  $|h_1(x) - h_2(x)| \leq \varepsilon$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), akkor a Cauchy-feladat megfelelő  $u_1, u_2$  megoldásaira  $|u_1(tx) - u_2(tx)| \leq \varepsilon t$  ( $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ ).

8. Mutassuk meg  $n = 1$  esetén, hogy a hiperbolikus Cauchy-feladat  $u$  megoldása folytonosan függ  $f$ -től a következő értelemben: ha  $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ , amelyekre  $|f_1(t, x) - f_2(t, x)| \leq \varepsilon$  ( $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ), akkor  $|u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \frac{\varepsilon t^2}{2}$  ( $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ ).

\*9. Legyen  $u \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times [0, 1])$  az egydimenziós  $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$  hullámegyenlet egy olyan megoldása, amelyre  $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$  minden  $t \geq 0$  esetén (mindkét végén rögzített húr). Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\partial_t u(t, x))^2 + (\partial_x u(t, x))^2 dx$$

formulával értelmetten függvény (mechanikai energia) valójában nem függ  $t$ -től.