

5. feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2020. tavasz

1. Bizonyítsuk be, hogy a $\partial_t u - \Delta u = 0$ hővezetési egyenlet dilatációra nézve invariáns, pontosabban, ha $v(t, x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$ ($t > 0, x \in \mathbb{R}^n$), ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\partial_t v - \Delta v = 0$.
2. Keressünk az n -dimenziós hővezetési egyenletnek $u(t, x) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{|x|^2}{t}\right)$ ($t > 0, x \in \mathbb{R}^n$) alakú megoldásait, ahol $v \in C^2(\mathbb{R}_0^+)$ és $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Igazoljuk, hogy $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta = (\sqrt{\pi})^n$.
4. Legyen $E: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, amelyre

$$E(t, x) := \begin{cases} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{ha } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

- a) Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq 0$, akkor $\lim_{t \rightarrow 0^+} E(t, x) = 0$, viszont $\lim_{t \rightarrow 0^+} E(t, 0) = +\infty$.
 - b) Igazoljuk, hogy minden $t > 0$ esetén $\int_{\mathbb{R}^n} E(t, x) dx = 1$.
 - c) Mutassuk meg, hogy $E \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.
 - d) Igazoljuk, hogy $\partial_t E(t, x) - \Delta E(t, x) = 0$, ha $t > 0$ és $x \in \mathbb{R}^n$.
 - e) Bizonyítsuk be, hogy $\partial_t E - \Delta E = \delta_0$ disztribúció értelemben \mathbb{R}^{n+1} -en.
5. Legyenek $a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$ konstansok. Igazoljuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} \cos by dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

- *6. Legyen $E: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{ha } n = 2, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n \geq 3, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \end{cases}$$

ahol ω_n jelöli az egység sugarú n -dimenziós gömb felszínét.

- a) Mutassuk meg, hogy $E \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$.
- b) Igazoljuk, hogy $\Delta E(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- c) Bizonyítsuk be, hogy $-\Delta E = \delta_0$ disztribúció értelemben \mathbb{R}^n -en.