

3. feladatsor  
III. éves alkmát parcediff 2020. tavasz

1. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi másodrendű differenciáloperátorok (hol) milyen típusúak.

a)  $Lu = \partial_x^2 u + 6\partial_{xy} u + \partial_y^2 u$

b)  $Lu = 6\partial_x^2 u + 8\partial_{xy} u + 8\partial_y^2 u + 2\partial_{xz} u + 6\partial_{yz} u + 10\partial_z^2 u$

c)  $Lu = (x+y)\partial_x^2 u + 2\sqrt{xy}\partial_{xy} u + (x+y)\partial_y^2 u$

2. Mutassunk olyan differenciáloperátort (folytonos együtthatófüggvényekkel), amely  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ -on elliptikus,  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$ -on és  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ -on hiperbolikus. Igaz-e, hogy egy ilyen differenciáloperátor  $\{0\} \times \mathbb{R}^+$ -on parabolikus?

3. Mutassunk olyan differenciáloperátort (folytonos együtthatófüggvényekkel), amely  $\mathbb{R}^n$  minden pontjában elliptikus, de nem egyenletesen elliptikus  $\mathbb{R}^n$ -en.

4. Lehet-e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  korlátos tartományon folytonos együtthatófüggvényekkel olyan differenciáloperátort megadni, amely az  $\Omega$  tartomány minden pontjában elliptikus, de nem egyenletesen elliptikus  $\Omega$ -n. Mi a helyzet akkor, ha az együtthatófüggvények  $\bar{\Omega}$ -on folytonosak, és az operátor  $\bar{\Omega}$  minden pontjában elliptikus?

5. Adjunk meg  $a, b, c$  nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az  $Lu = a(x, y)\partial_x^2 u + b(x, y)\partial_{xy} u + c(x, y)\partial_y^2 u$  másodrendű differenciáloperátor a felső nyílt félsíkban elliptikus, az alsó nyílt félsíkban pedig hiperbolikus legyen.

6. Adjunk meg  $a, b$  nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az  $Lu = a(x, y)\partial_x^2 u + x^2\partial_{xy} u + y^2\partial_{yx} u + b(x, y)\partial_y^2 u$  másodrendű differenciáloperátor elliptikus a  $B(0, 1)$  körlap belsejében és az  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}(0, 2)$  végtelen körgyűrű belsejében, továbbá hiperbolikus a  $B(0, 2) \setminus \bar{B}(0, 1)$  körgyűrű belsejében (ahol  $B(0, R)$  jelöli az origó középpontú  $R$  sugarú nyílt körlapot a síkon).

7. Transzformáljuk kanonikus alakra a következő másodrendű differenciálegyenleteket!

a)  $4\partial_{xy} u + 2\partial_y u + u = x + y$

b)  $\partial_x^2 u + 2\partial_{xy} u + \partial_y^2 u + \partial_x u + u = x - y$

\*8. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  megoldását!

$$\begin{aligned}\partial_x^2 u(x, y) - \partial_y^2 u(x, y) - 2\partial_x u(x, y) + u(x, y) &= y \\ u(x, 0) &= e^x \\ \partial_y u(x, 0) &= e^x + 1\end{aligned}$$