2. feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2020. tavasz

1. Keressük meg az alábbi elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletek klasszikus megoldásait!

   a) $y\partial_x u(x,y) - x\partial_y u(x,y) = 0$
   b) $x\partial_x u(x,y) = y\partial_y u(x,y)$
   c) $\partial_x u(x,y) = y\partial_y u(x,y)$
   d) $y^2\partial_x u(x,y) + e^x\partial_y u(x,y) = 0$
   e) $yz\partial_x u(x,y,z) + xz\partial_y u(x,y,z) + (x^2+y^2)\partial_z u(x,y,z) = 0$
   f) $x\partial_x u(x,y,z) + y\partial_y u(x,y,z) + z\partial_z u(x,y,z) = 0$

2. Keressük meg az alábbi elsőrendű kvázilineáris parciális differenciálegyenletek klasszikus megoldásait!

   a) $yu(x,y)\partial_x u(x,y) + xu(x,y)\partial_y u(x,y) = x^2 + y^2$
   b) $y\partial_x u(x,y) - x\partial_y u(x,y) = 2xyu(x,y)$

3. Oldjuk meg az alábbi Cauchy-feladatokat!

   a) $x\partial_x u(x,y) - y\partial_y u(x,y) = 0, \quad u(x,\frac{1}{x}) = 1$
   b) $x\partial_x u(x,y) - y\partial_y u(x,y) = 0, \quad u(x,\frac{1}{x}) = x$
   c) $x\partial_x u(x,y) - y\partial_y u(x,y) = 0, \quad u(x,y) = u(-x,-y), u(x,x^2) = x$
   d) $yu(x,y)\partial_x u(x,y) + xu(x,y)\partial_y u(x,y) = x^2 + y^2, \quad u(x,0) = x^2$
   e) $x\partial_x u(x,y) + y\partial_y u(x,y) = u(x,y), \quad u(x,1) = x^2$
   f) $x\partial_x u(x,y) - \partial_y u(x,y) = 1, \quad u(x,0) = x$

4. Tekintsük az $y\partial_x u(x,y) - x\partial_y u(x,y) = y$ egyenletet. Van-e $u(0,y) = y$ mellékfeltételt kielégítő $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldása?

5. Keressük meg az $y\partial_x u(x,y) - x\partial_y u(x,y) = x^3y + xy^3$ parciális differenciálegyenletnek azon megoldását, amely illeszkedik az y tengelyre.

6. Legyen $H \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f, g \in C(\mathbb{R})$. Adjuk meg az alábbi rendszerek első integráljait!

   a) $\begin{cases} \dot{x} = \partial_2 H(x,y) \\ \dot{y} = -\partial_1 H(x,y) \end{cases}$
   b) $\begin{cases} \dot{x} = f(y) \\ \dot{y} = g(x) \end{cases}$

*7. Keressük meg a $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$ egyenlet klasszikus megoldásait úgy, hogy új ismeretlen függvény bevezetésével az egyenletet elsőrendűvé transzformáljuk.