Parciális differenciálegyenletek előadás
Matematika BSc 6. félév

2018/2019. tavasz

Hol tartunk?

Ennek a előadásvázlatnak a célja, hogy címszavakban összefoglalja és átláthatóbbá tegye az előadásokon elhangzott anyagot. A vizsga anyaga minden, ami ebben az összefoglalóban szerepel, kivéve a „mese" jelzővel ellátott részek. Bizonyítani csak azokat az állításokat kell tudni, amelyek után a „biz." rövidítés olvasható zárójelben (tehát azokat nem, ahol „nem biz." vagy „biz. ötlete" vagy „biz. vázlata").

1. előadás (február 11.)

- **Tájékoztató a félévről.**
- **Alapfogalmak:** jelölések ($\partial_t, \partial_x, \partial_x^2, \dots$), multiindex $= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, abszolútértéke $=$ deriválás rendje, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, PDE „fogalma", klasszikus megoldás, rend, mellékfeltételek (kezdeti, perem), korrekt kitűzésű feladat (létezés, egyértelműség, folytonos függés);
- **Fizikai példák:** hővezetési egyenlet (rúd hőmérséklete) egy dimenzióban, több dimenziós hővezetési egyenlet, hullámegyenlet egydimenzióban (húr rezgése), magasabb dimenziós hullámegyenletek„ Poisson- és Laplace-egyenlet, további példák: transzport- és biharmonikus egyenlet, egyenletrendszerek.

2. előadás (február 18.)

- **Másodrendű, főrészében lineáris egyenletek osztályozása:** általános alak, főrész, előzetes feltevés ($a_{jk} = a_{kj}$), együtthatómátrix, sajátértékek előjele, elliptikus, hiperbolikus, parabolikus egyenlet, példák (hullámegyenlet, hővezetési egyenlet, Laplace-egyenlet);
- **Másodrendű lineáris egyenletek kanonikus alakja állandó együtthatós esetben:** a főrész transzformációjának ötlete (főtengelytétel, új változó bevezetése), az alacsonyabb rendű tagok transzformációjának ötlete (új függvény bevezetése exponenciális szorzótényező segítségével), kanonikus alak elliptikus esetben (Helmholtz-egyenlet);
- **A $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály:** jelölések ($C^k(\Omega), k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ esetekben), tartó (support), kompakt tartójú függvények, $C_0^\infty(\Omega)$, példa: η függvény (biz. csak vázlatosan), η_ε és tulajdonságai („egységapproximációt generál"), az approximációs tétel (kimondás, biz. elkezdése, befejezés következő órán).

3. előadás (február 25.)

- **A $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály:** az approximációs tétel (biz. a folytonos és az L^1 eset), $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $L^p(\Omega)$-ban $1 \le p < \infty$ esetén (nem biz.), kompakt halmazon 1-gyel egyenlő kompakt tartójú sima függvény konstruálása (biz.), egységosztás tétele (biz.);
- **Disztribúciók alapfogalmai:** konvergencia $\mathscr{D}(\Omega)$-ban, a disztribúció fogalma, folytonosság jelentése (sorozatfolytonosság), példa: Dirac-delta (biz.).

4. előadás (március 5.)

- **Disztribúciók alapfogalmai:** a folytonosság ekvivalens megfogalmazása (biz.), reguláris disztribúció, T_f (folyt. biz.), reguláris disztribúció egyértelműen meghatározza melyik lokálisan integrálható függvényhez tartozik (biz.);

- **Disztribúciók egyenlősége:** globális és lokális egyenlőség fogalma, a két fogalom ekvivalenciája (biz.), disztribóció tartója, példák: $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$, $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$ (nem biz.);
- **Algebrai műveletek disztribúciókkal:** összeadás, számmal szorzás, sima függvénnyel szorzás;
- **Disztribúciók differenciálása:** motiváció ($\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$ legyen),

5. előadás (március 12.)

- **Disztribúciók differenciálása:** $T_{\partial^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(\partial^\alpha \varphi)$ (biz. ötlete), $\partial^\alpha u$ definíciója, $\partial^\alpha u$ továbbra is disztribúció (nem biz.), példa: $H' = \delta_0$ (nem biz., gyak.), szakaszonként folytonosan differenciálható függvény deriváltja (nem biz.), hogyan tovább? (cél: $Lu = f$, ehhez alapmegoldás, konvolúció, amihez direkt szorzat);
- **Disztribúciók direkt szorzata:** függvények direkt szorzata, $T_{f\times g}$ megadása T_f és T_g segítségével (biz.), $u \times v$ definíciója, a definíció értelmessége (nem biz.), a direkt szorzat tulajdonságai, u és v felcserélése (biz.), linearitás (nem. biz.), differenciálás (nem biz.), tartó (nem biz.), példa: $\delta_a \times \delta_b = \delta_{(a,b)}$ (biz.);
- **Disztribúciók konvolúciója:** függvények konvolúciója, elégséges feltételek a konvolúció létezésére: mindkét függvény L^1-beli (biz.) vagy az egyik tartója kompakt (nem biz.), T_{f*g} megadása T_f és T_g segítségével (biz.), baj: $\varphi(y+z)$ nem kompakt tartójú, ötlet: csonkítás.

6. előadás (március 20.)

- **Disztribúciók konvolúciója:** csonkító függvények konvergenciája $\mathbb{R}^{2n}$-ben, $T_{f*g} = \lim_{k\to\infty} T_f \times T_g\big((y,z) \mapsto \varphi(y+z)\zeta_k(y,z)\big)$, $u * v$ definíciója (mikor értelmes), a konvolúció tulajdonságai, linearitás (nem biz.), kommutativitás (nem biz.), differenciálás (nem biz.), konvolúció tartója (nem biz.); példa: $\delta_0 * u$;
- **Alapmegoldások:** állandó együtthatós lineáris differenciáloperátor alakja, alapmegoldás definíciója, $Lu = F$ megoldása az alapmegoldás segítségével és egyértelműsége megfelelő értelemben (biz.), példák alapmegoldásokra (hővezetés, hullámegyenlet);
- **Hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok:** a klasszikus feladat, klasszikus megoldás, jel: $\mathbb{R}^{n+1}_+$, cél: hogyan általánosítható?, a Cauchy-feladat klasszikus megoldása disztribúció értelemben eleget tesz a hullámegyenletnek $F = T_{\tilde{f}} + \delta_0' \times T_g + \delta_0 \times T_h$ jobb oldal esetén (biz.).

7. előadás (március 27.)

- **Hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok:** előző órai tétel felelevenítése, a tartók részei a zárt féltérnek, az általánosított Cauchy-feladat értelmezése, az általánosított Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik megoldása (biz. lényege), a klasszikus feladatnak legfeljebb egy megoldása van (biz.), d'Alembert-formula (nem biz.), mese a véges sebességű hullámterjedésről és a Huygens-elvről;
- **Hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok:** a klasszikus feladat értelmezése, a klasszikus megoldás disztribúció értelemben eleget tesz a hővezetési egyenletnek $F = T_{\tilde{f}} + \delta_0 \times T_g$ jobb oldallal (nem biz.), az általánosított Cauchy-feladat értelmezése, a hővezetési egyenlet alapmegoldása, baj: $E*F$ általában nem létezik, keressünk olyan disztribúcióosztályt, amelyben létezik, az $\mathscr{M}$ függvényosztály bevezetése, az $\mathscr{M}$ osztályban $E * f$ függvény értelemben létezik és nem vezet ki (biz.), $\tilde{\mathscr{M}}$ disztribúcióosztály, ha $F \in \tilde{\mathscr{M}}$, akkor $E * F$ disztribúció értelemben létezik és $E * F \in \tilde{\mathscr{M}}$ (biz. gondolata), a klasszikus Cauchy-feladat megoldásának létezése (nem biz.), mese a végtelen sebességű hőterjedésről.

8. előadás (április 5.)

- **Peremérték-feladatok:** $-\mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u)+qu$, divergencia, gradiens, Δ, különböző peremfeltételek (Dirichlet, Neumann, harmadik), milyen simaságú megoldást keresünk?, Gauss–Osztrogradszkij-tétel (skalár és vektoralak, nem biz.), mese a fizikai jelentésről, Green első és második formulája (biz.), a harmadik peremérték-feladat megoldásának egyértelműsége (biz.), sajátértékek, sajátérték-feladatok, a sajátértékek előjele (biz.).

9. előadás (április 12.)

- **Poisson-egyenlet alapmegoldása:** az alapmegoldás (nem biz.);
- **Green-függvények:** Green-függvény értelmezése, a Green-függvények három tulajdonsága (biz. csak a két könnyű), Green reprezentációs tétel (nem biz.);
- **Poisson-formula féltéren:** féltér Green-függvényének meghatározása a hipersíkra való tükrözés módszerével, a normális irányú derivált kiszámítása, féltérre vonatkozó Poisson-formula (nem biz.).
- **Poisson-formula gömbön:** inverzió, az inverzió egy tulajdonsága (biz.), gömb Green-függvénye és normális irányú deriváltja (nem biz.), gömbre vonatkozó Poisson-formula (nem biz.), a formula komplex függvénytani alakja.

10. előadás (április 24.)

- **Szoboljev-terek:** a $H^k(\Omega)$ tér értelmezése teljessé tétellel, hogyan jellemezhetők a térben a függvények? (biz. az egyik irány), a $H_0^k(\Omega)$ tér értelmezése, néhány egyszerű alaptulajdonság, ekvivalens norma $H_0^1(\Omega)$-ban (biz.), a $H^1(\Omega)$ tér beágyazása az $L^2(\Omega)$ térbe kompakt (nem biz.), a kompaktság jelentése sorozatokkal, $H^1(\Omega)$-beli függvények peremre való megszorításának motivációja, normaegyenlőtlenség $C^1(\overline{\Omega})$-beli függvények peremre való megszorítására (nem biz.), a nyom operátor és a nyom értelmezése.

11. előadás (május 8.)

- **Szoboljev-terek:** a nyom operátor és a nyom értelmezése, $H_0^1(\Omega)$ jellemzése a nyom segítségével (nem biz.).
- **Peremérték-feladatok gyenge megoldásai:** a $-\mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u)+qu$ operátorra vonatkozók első peremérték-feladat a klasszikus esetben, a gyenge alak értelmezése próbafüggvénnyel való szorzással (biz.), kapcsolat a klasszikus és gyenge megoldások között (biz.), ekvivalens skalárszorzat bevezetése a $H_0^1(\Omega)$ térben (biz.), gyenge megoldás létezése, egyértelműsége és folytonos függése a jobb oldaltól homogén Dirichlet-peremfeltétel esetén (biz.), az inhomogén peremfeltétel esete hogyan kezelhető (ötlet).